物性研究　78－5（2002－8）

物性理論における群論的分岐理論入門[1,2]（その１）

—対称性の破れのための群論入門—

尾崎 正明[3]

(2002年6月12日受理)

は し が き

近年固体電子論ではますます豊富な相（状態）が登場している．例えば，電荷密度波（charge density wave: CDW)，スピン密度波 (spin density wave: SDW)，パイエルス状態（Peierls'state)，軌道秩序状態，s-波超伝導状態，d-波超伝導状態，トリプレット超伝導状態，磁場中の超伝導の種々のボルテックス状態等がある．さらには強磁性 (FM) と超伝導との共存状態等，ますます豊富な状態が見出されている．

これらの各状態はそれぞれの研究現場（物質系）での格闘の中で先人達による深い洞察と名人芸によって個別的に求められてきたものである．研究者，特に若い研究者にとって，これらの多様な状態を全般にわたって理解し把握していくことは困難になっている．このような多様な状態を，系統的統一的に把握し，他にどのような状態が有り得るかの見通しを付けておくことは，状態の理解のみならず，これからの研究にも重要である．

上記の多くの状態は対称性の破れという観点から整理することが出来る．系が転移温度より高温で，ある対称性 (群 G_0 で規定される) を持っているとき，どのような対称性の破れた状態 (群 G_0 の部分群 $G_j(j=1,2,\cdots)$ で規定される) があり得るか？が問題となる．本論文は多様な状態を対称性の破れという観点から，系統的に導き出す手法を解説する．そのための数学的手段が群論的分岐理論である．

分岐理論は外部パラメーターが変化したとき，非線形方程式の解の構造がどのように変化するかを研究する理論である．この非線形方程式がある対称性（ある群 G_0 に共変な方程式という）を持つとき，解の持つ対称性を論ずるのが群論的分岐理論である．この群論的分岐理論は１９８０年頃 Sattinger[1)], Vanderbauwhede[2)], Cicogna[3)] 等によって整備されてきた．これらの結果は Golubitsky, Stewart and Shaeffer による優れた書物 Singularity and Groups in Bifurcation Theory[4, 5)] に詳細に記載されている．この解説では群論的分岐理論を，変分問題の観点から物性物理の研究者にも馴染みやすい形で解説し，その物性理論での対称性の破れた状態への適用を述べる．

読者として物性物理の４回生、修士課程の大学院生程度が対象とし，群論の知識は仮定していない．その１では第５章までを掲載し，その２（掲載号未定）では第６章以降を掲載する．

---

[1]本稿は、編集部の方から特にお願いして執筆していただいた記事である．

[2]この原稿は，高知大学，岡山大学での集中講義のノートを元にして作成された．

[3]E-mail: kk.ozaki@f2.dion.ne.jp

尾崎　正明

目次

第１章　序論:対称性の破れとは

第１節で一次元電子系を例にとって, 対称性とその破れについて説明する. 簡単な必要最小の群を用いて電子状態と, 対称性を示す部分群構造との関連を述べる. 第２節で簡単な数学的モデルを例として, 変分問題の解の対称性と対称性の破れについて述べる. 群に関する用語については, 第２章に詳しく述べるので, この章はあまり気にせず読み進んでほしい.

1.1　一次元電子系における対称性の破れ

電子状態の対称性の破れと群と部分群の関係を直感的に把握するために, 一次元電子系の色々な対称性の破れた状態を考察する. これらの状態を図 1.1 のような状態が考えられる. 超伝導状態は直感的な描像を書くことが困難であるのでここでは考察しない. 以下これらの状態の対称性の群を考察する.

a) **N:** これは正常状態 (normal state: N) を示す. この状態は格子間隔を a とし, x 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_x$ すると, $\boldsymbol{t}_1 = a\boldsymbol{e}_x$ の並進に対して対称である. 並進の集合

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{t}_1) \quad = \quad \{\cdots, -n\boldsymbol{t}_1, \cdots, -2\boldsymbol{t}_1, -\boldsymbol{t}_1, 0, \boldsymbol{t}_1, 2\boldsymbol{t}_1, \cdots, n\boldsymbol{t}_1 \cdots\}, \tag{1.1}$$

を $\boldsymbol{t}_1$ を基本周期ベクトルとする**一次元並進群**と呼ぶ. 正常状態はまた原点 O に関する空間反転 I : $I \cdot x \Longrightarrow -x$ に対して不変である.　正常状態はスピン密度はゼロであるのでスピンを x 軸の回りの π 回転（これを u_{2x} と記す）しても不変である. 正常状態はこれ以外の対称性（ゲージ対称性その他）を有するが, ここでは説明を簡単にするため, 上記の対称性だけを考慮することにする. これらをまとめて正常状態の対称性の群（群の正確な定義は第２章で行う）G_{N} は次の様に書かれる.

$$G_{\mathrm{N}} \quad = \quad (E, u_{2x})(E, I)\boldsymbol{L}(\boldsymbol{t}_1), \tag{1.2}$$

ここで E は恒等元である. 基本的な対称操作は並進 $\boldsymbol{t}_1$, スピン回転 u_{2x}, 空間反転 I の３つである. これらの要素は群 G_{N} の生成元 (generator) と呼ばれる. この状態は二つ以上の生成元を同時に作用させても不変である. たとえば $\boldsymbol{t}_1$ と u_{2x} を同時に作用させる操作 $u_{2x}\boldsymbol{t}_1$ に対して状態は不変である. これはこれらの要素が群をなすことを示している. 上に述べた対称操作のうちどれか（ひとつまたはそれ以上）が失われてて対称性が破られた秩序状態が得られる. それらのうち直感的に図示しやすい状態について個別に説明する.

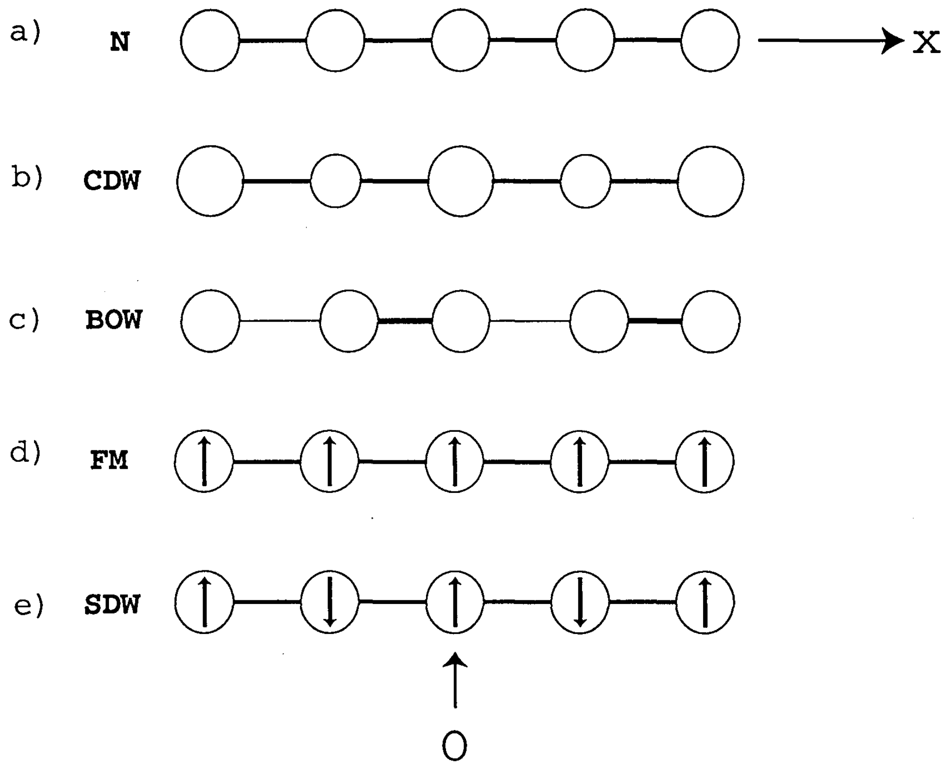

図 1.1: 一次元電子系の状態. a) は 正常状態 (N), b) は電荷密度波 (CDW), c) はパイエルス状態 (BOW (bond order wave)), d) は強磁性状態 (FM), e) はスピン密度波状態 (SDW) を示す. ◯ の大きさは電荷密度の大きさを表す. $\{\uparrow,\downarrow\}$ はスピンを示す. 結合線の太さは原子間結合の強弱を示し, 太いほど強い. 中心の O は x 座標の原点で空間反転の中心を示す.

b) CDW: これは電荷密度波 (charge density wave: CDW) で電荷密度が交互に変動する状態である.

円の大小 (◯ , ○) が電荷密度の大小を表している. 図 1.1 b より次の対称性を持つことが分かる.

$$G_{\mathrm{CDW}} = (E, u_{2x})(E, I)\boldsymbol{L}(2\boldsymbol{t}_1), \tag{1.3}$$

ここで $\boldsymbol{L}(2\boldsymbol{t}_1)$ は $2\boldsymbol{t}_1$ を基本周期ベクトルとする一次元並進群である. この状態はスピン回転 u_{2x}, 空間反転 I の対称性は保存されているが, 並進操作 $\boldsymbol{t}_1$ の対称性が失われ, 基本周期ベクトルが $\boldsymbol{t}_1$ から $2\boldsymbol{t}_1$ になった状態である.

c) BOW: これはパイエルス状態とも云われている. 原子間結合の強さが交互に変わる状態で化学の分野では結合次数波 (bond order wave : BOW) と呼ばれている. (▁ , ＿) は結合距離が短くて強い結合と結合距離が長くて弱い結合を表す. この状態の対称性は

$$G_{\mathrm{BOW}} = (E, u_{2x})(E, I\boldsymbol{t}_1)\boldsymbol{L}(2\boldsymbol{t}_1), \tag{1.4}$$

である. この状態は独立の空間反転対称性 I と基本並進対称性 $\boldsymbol{t}_1$ は失っている. しかし基本並進 $\boldsymbol{t}_1$ と空間反転 I を同時に行う操作 $I\boldsymbol{t}_1$ に対しては不変である.

d) FM: これは強磁性状態 (Ferromagnetic state: FM) を示す. 矢印↑,↓はスピンの向きを示す. この状態は次の対称性を持つ.

$$G_{\mathrm{F}} \;=\; (E,I)\boldsymbol{L}(\boldsymbol{t}_1). \tag{1.5}$$

この状態は並進対称性 $\boldsymbol{t}_1$, 空間反転 I 対称性を持っているが, x 軸の周りのスピンの π 回転 u_{2x} に対する対称性を失っている.

e) SDW: これは反強磁性 (Antiferro-magnetic state: AF) 状態またはスピン密度波 (spin density wave: SDW) と呼ばれている状態である. 次の対称性を持つ.

$$G_{\mathrm{SDW}} \;=\; (E,I)(E,u_{2x}\boldsymbol{t}_1)\boldsymbol{L}(2\boldsymbol{t}_1). \tag{1.6}$$

この状態は空間反転 I の対称性を持っており, 並進対称性 $\boldsymbol{t}_1$, x 軸の周りのスピンの π 回転 u_{2x} に対する対称性を持っていないが, $\boldsymbol{t}_1$ の並進とスピン回転 u_{2x} を同時に行う操作 $u_{2x}\boldsymbol{t}_1$ の対称性を持っている.

これらをまとめると表1.1のようになる. 以上より一次元電子系の電子状態は正常状態の対称性の

状態			対称性の群
正常状態 (N)	G_{N}	$=$	$(E,u_{2x})(E,I)\boldsymbol{L}(\boldsymbol{t}_1)$
電荷密度波 (CDW)	G_{CDW}	$=$	$(E,u_{2x})(E,I)\boldsymbol{L}(2\boldsymbol{t}_1)$
パイエルス状態 (BOW)	G_{BOW}	$=$	$(E,u_{2x})(E,I\boldsymbol{t}_1)\boldsymbol{L}(2\boldsymbol{t}_1)$
強磁性状態 (FM)	G_{FM}	$=$	$(E,I)\boldsymbol{L}(\boldsymbol{t}_1)$
スピン密度波 (SDW)	G_{SDW}	$=$	$(E,I)(E,u_{2x}\boldsymbol{t}_1)\boldsymbol{L}(2\boldsymbol{t}_1)$

表 1.1: 1次元電子系の電子状態の対称性

操作の群 G_{N} の部分群 (G_{CDW} 等) で特徴付けられることが分かった.

逆に G_{N} の部分群 G_{j} をリストアップすることが出来れば, 可能な電子状態をリストアップする事が出来ると予想される. 超伝導, スパイラルスピン密度波等の多様な状態を考察するためには, G_{N} としてもっと多くの対称変換の要素をもつ群を考える必要がある. 以下の章では一般的な系で, 正常状態の対称性の群から可能な部分群, したがって可能な対称性が破れた状態を系統的にリストアップする方法を記述する.

1.2 簡単な数学的な例

対称性の破れと, 群と部分群の関係を数学的により明確に捉えるために, 次の自由エネルギーの変分問題を考えるを考える.

$$F(x,\lambda) \;=\; x^4 - 2\lambda x^2, \tag{1.7}$$

ここで $x \in \mathrm{R}$ (Rは実数体を表す) は状態変数, $\lambda \in \mathrm{R}$ は温度, 圧力等の外部パラメーターである。「パラメーター λ を変えたとき, それに伴って $F(x,\lambda)$ の最小値を与える x はどのように変わ

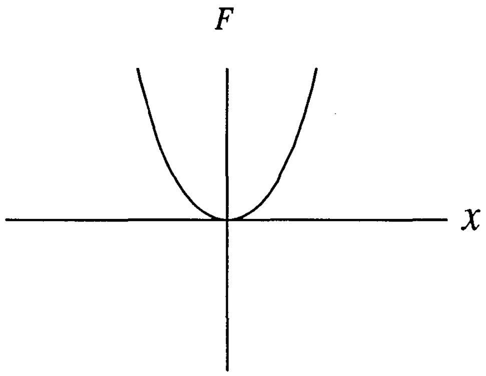

図 1.2: $\lambda \leq 0$ の場合.

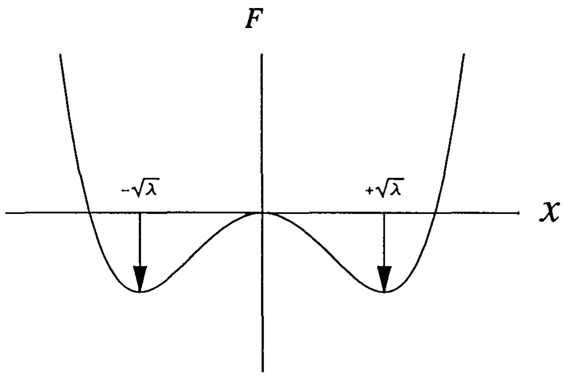

図 1.3: $\lambda > 0$ の場合.

るか？」という問題を考察する．$F(x,\lambda)$ のグラフは図 1.2 と図 1.3 のようになる．以下 $F(x,\lambda)$, $\Phi(x,\lambda) \equiv \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,\lambda)$ および $\Phi(x,\lambda)=0$ の解 $x(\lambda)$ の対称性を考察する．

$F(x,\lambda)$ の対称性:

$F(x,\lambda)$ は $G_0=(E,I)$ 不変な関数である．すなわち $I\cdot x=-x$ を考慮して

$$\begin{aligned} F(I\cdot x,\lambda) &= F(-x,\lambda)=(-x)^4-2\lambda(-x)^2 \\ &= x^4-2\lambda x^2=F(x,\lambda), \end{aligned} \tag{1.8}$$

が成り立つ．これは次の様に書くことが出来る．

$$F(g\cdot x,\lambda) \;=\; F(x,\lambda) \quad \text{for } g\in G_0. \tag{1.9}$$

このことを $F(x,\lambda)$ は G_0 不変な関数 (G_0 invariant functiomn) とよぶ．

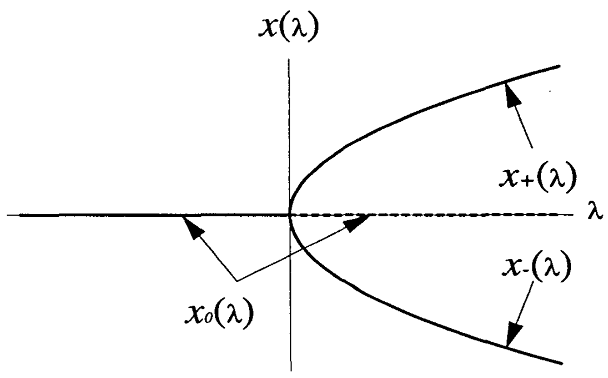

図 1.4: 解の分岐．実線は安定な解, 点線は不安定な解を示す．

$\Phi(x,\lambda)$ の対称性:

$F(x,\lambda)$ の極値を与える x は

$$\Phi(x,\lambda) \;\equiv\; \frac{\partial F}{\partial x}(x,\lambda)=4(x^3-\lambda x)=0, \tag{1.10}$$

より求められる. $\Phi(x,\lambda)$ は次の関係を満たす.

$$\Phi(I\cdot x,\lambda) \;=\; 4((-x)^3-\lambda(-x)) = -4(x^3-\lambda x) = -\Phi(x,\lambda) = I\cdot\Phi(x,\lambda). \tag{1.11}$$

すなわち

$$\Phi(g\cdot x,\lambda) \;=\; g\cdot\Phi(x,\lambda) \quad \text{for} \quad g\in G_0. \tag{1.12}$$

(1.12) の関係が成り立つことを, $\Phi(x,\lambda)$ は G_0 同変 (G_0 equivariant) または G_0 共変 (G_0 covariant) であるという. (1.9) と (1.12) との違いに注意されたい.

$\Phi(x,\lambda)=0$ の解 $x(\lambda)$ の対称性:

$\Phi(x,\lambda)=4(x^3-\lambda x)=4x(x^2-\lambda)=0$ の解 $x(\lambda)$ は次のようになる.

$$\begin{aligned} &\lambda\le 0 \qquad \text{のとき} \quad x=x_0(\lambda)\equiv 0 \ \ \text{のみ} \\ &\lambda>0 \qquad \text{のとき} \quad x=x_0(\lambda)=0 \quad \text{と} \quad x=x_\pm(\lambda)\equiv\pm\sqrt{\lambda} \end{aligned} \tag{1.13}$$

図 1.2, 図 1.3 に見られるように, $\lambda\le 0$ で $x_0(\lambda)$ が, $\lambda>0$ で $x_\pm(\lambda)$ が安定な解(極小値)であり, $\lambda>0$ では $x_0(\lambda)$ は不安定(極大値)な解になる. まず $x_0(\lambda)$ の対称性を考える. $I\cdot x_0(\lambda)=I\cdot 0=-0=0=x_0(\lambda)$ より

$$I\cdot x_0(\lambda) \;=\; x_0(\lambda)$$

したがって

$$g\cdot x_0(\lambda) \;=\; x_0(\lambda) \quad \text{for } g\in G_0. \tag{1.14}$$

このことを x_0 は G_0 不変な解であるという.

あるxRに対して

$$G(x) \;=\; \{g\in G_0 \mid g\cdot x = x\} \tag{1.15}$$

なる群の元の集合を x の不変部分群または固定部分群という. ここで $\{g\in G_0\mid A\}$ は条件 A を満たす G_0 の元の集まりを意味する. x_0 の不変部分群 $G(x_0)$ は x_0 を変えない対称操作として定義され

$$G(x_0) \;\equiv\; \{g\in G_0 \mid g\cdot x_0 = x_0\} = G_0, \tag{1.16}$$

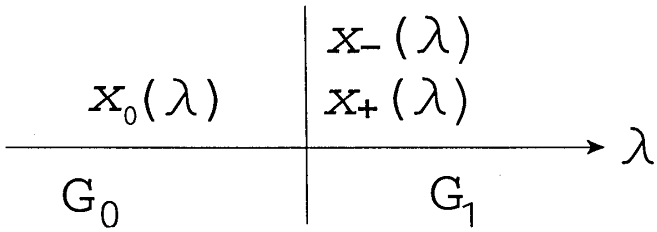

図 1.5: 転移による解の不変部分群の変化.

となる．

つぎに $x_\pm(\lambda)$ の不変部分群を考える．

$$I \cdot x_\pm(\lambda) \;=\; -(\pm\sqrt{\lambda}) = \mp\sqrt{\lambda} = x_\mp(\lambda) \neq x_\pm(\lambda) \tag{1.17}$$

であるので，解 $x_\pm(\lambda)$ の不変部分群 $G(x_\pm(\lambda))$ は

$$G(x_\pm(\lambda)) \;\equiv\; \{g \in G_0 \mid g x_\pm(\lambda) = x_\pm(\lambda)\} = \{E\} = \boldsymbol{C}_1 = G_1 \tag{1.18}$$

となる．ここで $\boldsymbol{C}_1$ は恒等元 E のみからなる群である．図 1.4 に λ と解 $x_0(\lambda), x_+(\lambda), x_-(\lambda)$ の様子を示す．図 1.2, 図 1.3 に見られる様に実線は安定（最小値）な解を，点線は不安定（極大値）を示す．これを群の言葉で言い換えると，$\lambda = 0$ で安定な解の不変部分群は $G_0 = (E, I) =$ から $G_1 = \boldsymbol{C}_1 = \{E\}$ へ変化したということが出来る．これは図 1.5 のように表すことが出来る．

一変数の場合は群の概念が無くても解析は容易であったが，多変数になり，群 G_0 がもっと多くの対称操作を含む場合には，「図 1.5 に対応する図はどのようなものになるか？」，「G_0 から，多くの部分群の中のどのようなの部分群に移行するか？」が問題になる．

第2章　群と部分群

固体物理における対称性の破れた状態は第一段階として, 現象論である Ginzburg-Landau(GL) 理論または微視的理論の基礎として Hartree-Fock-Bogoliubov 近似で扱われる. これらの理論はある群 G_0 に不変な関数の変分問題として定式化できる. 対称性の破れは変分問題の解の不変部分群 G_j (G_0の部分群) として特徴付けられる. したがって「元の群 G_0 に対してどのような部分群 G_j があるか?」を理解することが重要になる. 第 2.1 節では群とその部分群, 共役部分群について説明する. 第 2.2 節では二つの群 H と K の直積 $H \times K$ の部分群を求めるときに重要な役割を果たす剰余類, 準同型定理, 第一同型定理について述べる. 第 2.3 節では二つの群 H, K の直積 $H \times K$ の部分群を系統的に求める方法について述べる. これらは空間回転 × スピン回転, 間回転 × ゲージ変換等の対称性の破れを議論するときに重要になる. 銅酸化物の多くが持つ対称性：正方格子に現われる点群 $\boldsymbol{D}_4$ の例を通じて部分群, 正規部分群, 準同型定理等の諸概念の理解が得られるように解説する.

2.1　群, 部分群, 共役部分群

群の定義

集合 $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_N\}$ の任意の二つの元 $g_i, g_j \in G$ に対して積 $g_i g_j$ が定義されていて, 次の 4 つの公理が成り立つとき, 集合 G を**群** (group) と呼ぶ.

1. 任意の 2 個の $g_i, g_j \in G$ に対して $g_i g_j \in G$.

2. 結合律 $g_i(g_j g_k) = (g_i g_k) g_k$ が成り立つ.

3. G の任意の元 $g \in G$ に対して

$$g_1 g \;=\; g g_1 = g$$

となる $g_1 \in G$ が存在する. 以下これを E と書くことにし, **単位元**と呼ぶ. G の単位元であることを明示する必要があるときは E_G と記す.

4. G の任意の元 $g \in G$ に対して

$$g^{-1} g \;=\; g g^{-1} = E$$

なる $g^{-1} \in G$ が存在する. g^{-1} を g の**逆元**と呼ぶ.

G の元の個数 N を G の**位数** (order) といい $|G|$ で表す.

	g_1	g_2	$\cdots$	g_j	$\cdots$	g_N
g_1	g_1g_1	g_1g_2	$\cdots$	g_1g_j	$\cdots$	g_1g_N
g_2	g_2g_1	g_2g_2	$\cdots$	g_2g_j	$\cdots$	g_2g_N
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
g_i	g_ig_1	g_ig_2	$\cdots$	g_ig_j	$\cdots$	g_ig_N
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
g_N	g_Ng_1	g_Ng_2	$\cdots$	g_Ng_j	$\cdots$	g_Ng_N

表 2.1: 群表の作成.

定理 2.1 組みかえ定理
位数 N の群 $G = \{g_1, g_2, \cdot, g_N\}$ が与えられたとする. G の任意の元 g を各元に掛けて得られる集合

$$\{gg_1, gg_2, \cdots, gg_N\} \tag{2.1}$$

の中には G の元が 1 度, ただ 1 度だけ現われる.

証明
G の任意の g_k に対して $g_k = gg_i$ となる g_i が存在する. 何故ならばこの式に左から g^{-1} をかけると $g_i = g^{-1}g_k$ を得るから. このような g_i は 1 度だけ現われる. なぜなら $g_i \neq g_j$ で $g_k = gg_i = gg_j$ なったとすると, $g_i = g^{-1}g_k$, $g_j = g^{-1}g_k$ となって $g_i = g_j$ となるから, $g_i \neq g_j$ に矛盾する. ∎
(2.1) では左から g を掛けたが, 右から掛けても同じ定理が成り立つ.

表 2.1 は**群表**と呼ばれ群のすべての元を縦と横に並べて元 g_i と g_j の積 g_ig_j を g_i の行と g_j の列の交点に書き込んだ表である. 群の性質は群表で完全に定まる. 定理 2.1 によって群表の全ての行と列で, G の各元が 1 度ずつ, そして 1 度だけ現われることになる.

例 2.1 $\boldsymbol{C_4}$
これは位数 4 の群であり, ある軸のまわりの $2k\pi/4$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ 回転のなす群として実現される. 通常その軸は z 軸が選ばれる. そのとき $\boldsymbol{C_4}$ は図 2.1 の図形の対称操作からなる群である. 群 $\boldsymbol{C_4}$ は次の元からなる.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C_4} &= \{E, C_{4z}^1, C_{4z}^2, C_{4z}^3\} \\ &= \{E, C_{4z}^+, C_{2z}, C_{4z}^-\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

ここで C_{4z}^j は z 軸の周りの $j \times 2\pi/4$ 回転の操を表し, $C_{4z}^+ = C_{4z}^1, C_{2z} = C_{4z}^2, C_{4z}^- = C_{4z}^3$ である.
$\boldsymbol{C_4}$ の群表が表 2.2 のようになることは容易に確かめられる.

例 2.2 $\boldsymbol{D_4}$
これは $\boldsymbol{C_4}$ に x 軸周りの π 回転 (C_{2x} と記す) の対称操作を付け加えたものである. すなわち

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D_4} &= \boldsymbol{C_4} + C_{2x}\boldsymbol{C_4} \\ &= \{E, C_{4z}^+, C_{2z}, C_{4z}^-\} + \{C_{2x}, C_{2x}C_{4z}^+, C_{2x}C_{2z}, C_{2x}C_{4z}^-\} \\ &= \{E, C_{4z}^+, C_{2z}, C_{4z}^-\} + \{C_{2x}, C_{2b}, C_{2y}, C_{2a}\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

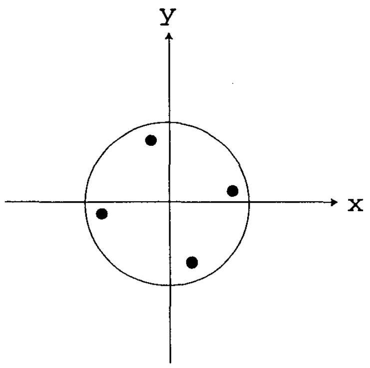

図 2.1: $\boldsymbol{C}_4$ 対称性を持つ図形. x, y 平面の上方にある点を • で表している.

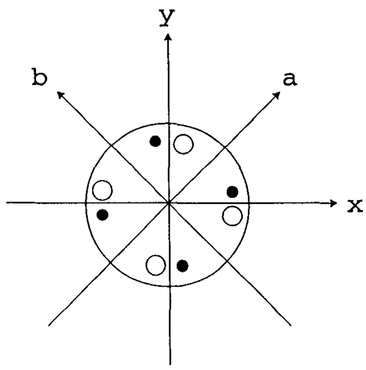

図 2.2: $\boldsymbol{D}_4$ 対称性を持つ図形. x, y 平面の上方にある点を •, 下方にある点を ○ で表している.

	E	C_{4z}^+	C_{2z}	C_{4z}^-
E	E	C_{4z}^+	C_{2z}	C_{4z}^-
C_{4z}^+	C_{4z}^+	C_{2z}	C_{4z}^-	E
C_{2z}	C_{2z}	C_{4z}^-	E	C_{4z}^+
C_{4z}^-	C_{4z}^-	E	C_{4z}^+	C_{2z}

表 2.2: $\boldsymbol{C}_4$ の群表.

ここで $C_{2y} \equiv C_{2x}C_{2z}$ は y 軸の周りの π 回転, $C_{2a} \equiv C_{2x}C_{4z}^-$ は図 2.2 の a 軸の周りの π 回転を表し, $C_{2b} \equiv C_{2x}C_{4z}^+$ は図 2.2 の b 軸の周りの π 回転を表す. また (2.3) で記号 "＋" は代数的な和ではなく, 集合としての和を意味する. 今後群の関係を表す等式で記号 "＋" は集合としての和を表すものと理解されたい. 図 2.2 より $\boldsymbol{D}_4$ の群表は表 2.3 のようになるのは容易に確かめられる.

	E	C_{4z}^+	C_{2z}	C_{4z}^-	C_{2x}	C_{2y}	C_{2a}	C_{2b}
E	E	C_{4z}^+	C_{2z}	C_{4z}^-	C_{2x}	C_{2y}	C_{2a}	C_{2b}
C_{4z}^+	C_{4z}^+	C_{2z}	C_{4z}^-	E	C_{2a}	C_{2b}	C_{2y}	C_{2x}
C_{2z}	C_{2z}	C_{4z}^-	E	C_{4z}^+	C_{2y}	C_{2x}	C_{2b}	C_{2a}
C_{4z}^-	C_{4z}^-	E	C_{4z}^+	C_{2z}	C_{2b}	C_{2a}	C_{2x}	C_{2y}
C_{2x}	C_{2x}	C_{2b}	C_{2y}	C_{2a}	E	C_{2z}	C_{4z}^-	C_{4z}^+
C_{2y}	C_{2y}	C_{2a}	C_{2x}	C_{2b}	C_{2z}	E	C_{4z}^+	C_{4z}^-
C_{2a}	C_{2a}	C_{2x}	C_{2b}	C_{2y}	C_{4z}^+	C_{4z}^-	E	C_{2z}
C_{2b}	C_{2b}	C_{2y}	C_{2a}	C_{2x}	C_{4z}^-	C_{4z}^+	C_{2z}	E

表 2.3: $\boldsymbol{D}_4$ の群表.

群の元の集合 $\{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$ があって群 G のすべての元が $\{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$ およびそれらの逆元の冪の有限個の積で表されるとき, $\{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$ を群 G の生成元 (generators) という. 群 G は

生成元 $\{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$ で生成されるという．群表を定めるのに必要十分な s 個の関係式

$$f_k(p_1, p_2, \cdots, p_m) = E \ (k = 1, \cdots, s) \tag{2.4}$$

があるとき，これらの関係を群 G の**定義関係** (defining relations) という．群 G の生成元は一意的とは限らず，多様な選び方がある．

例 **2.3** $\boldsymbol{C}_4$ の生成元とその定義関係
$\boldsymbol{C}_4$ の生成元を $p_1 = C_{4z}^+$ とする事が出来る．何故ならば

$$\begin{array}{rclcrcl} E &=& p_1^4 = (C_{4z}^+)^4, & & C_{4z}^+ &=& p_1 = C_{4z}^+ \\ C_{2z} &=& p_1^2 = (C_{4z}^+)^2, & & C_{4z}^- &=& p_1^3 = (C_{4z}^+)^3 \end{array} \tag{2.5}$$

となって $\boldsymbol{C}_4$ のすべての元が $p_1 = C_{4z}^+$ の冪でかけるからである．また生成元 C_{4z}^+ の定義関係は

$$p_1^4 = E \tag{2.6}$$

である．同様に $p_1 = C_{4z}^-$ も生成元になり得ることは容易に分かる．∎

例 **2.4** $\boldsymbol{D}_4$ の生成元とその定義関係
例 2.3 と $\boldsymbol{D}_4 = \boldsymbol{C}_4 + C_{2x}\boldsymbol{C}_4$ より，$\boldsymbol{D}_4$ の生成元として $\{p_1 = C_{4z}^+, p_2 = C_{2x}\}$ を取ることが出来る．$\boldsymbol{D}_4$ の元は次の様に p_1, p_2 の冪で表される．

$$\begin{array}{rclrclrclrcl} E &=& p_1^4, & C_{4z}^+ &=& p_1, & C_{2z} &=& p_1^2, & C_{4z}^- &=& p_1^3 \\ C_{2x} &=& p_2, & C_{2y} &=& p_1^2 p_2, & C_{2a} &=& p_1 p_2, & C_{2b}^- &=& p_2 p_1 \end{array} \tag{2.7}$$

生成元 $\{p_1 = C_{4z}^+, p_2 = C_{2x}\}$ の定義関係は

$$\begin{array}{rcl} p_1^4 &=& E \\ p_2^2 &=& E \\ p_2 p_1 p_2 p_1 &=& E \end{array} \tag{2.8}$$

である．∎

集合 G の部分集合 H が，G において定義された積に関して群をなすとき，H を G の**部分群**という．単位元 E のみからなる集合 $\boldsymbol{C}_1 = \{E\}$ と G 自身も G の部分群である．これら以外の部分群を真部分群という．「G にどのような部分群が存在するか？」という問題は対称性の破れの問題で中心的な役割を果たす．

群 G の部分集合 H が G の部分群であるための必要十分条件は次の 2 条件である．

(a) $h_i, h_j \in H \Longrightarrow h_i h_j \in H$

(b) $h \in H \Longrightarrow h^{-1} \in H$

証明
H が G の部分群ならば (a), (b) が成り立つことは明らかである．逆に (a),(b) が成り立つとする．(a) より H は積に対して閉じている．結合律は H が G の部分集合であるから，H についても満たされる．(b) より逆元の存在と，$hh^{-1} = E \in H$ より単位元が H に含まれる．よって群の 4 条件が満たされるので，H は群である．∎

例 2.5 $\boldsymbol{D}_4$ の部分群

例 2.4 のように $\boldsymbol{D}_4$ は 2 個の生成元 $\{C_{4z}^+, C_{2x}\}$ で生成された．$\boldsymbol{D}_4$ の 1 個の元または，$\{C_{4z}^+, C_{2x}\}$ 以外 2 個の元を生成元として群を生成すると，部分群が得られる可能性がある．

１個の生成元の場合

生成元が $p_1 = C_{4z}^+$ の場合．$p_1^4 = E$ であるので $\{p_1, p_1^2, p_1^3, p_1^4 = E\} = \{E, C_{4z}^+, C_{2z}, C_{4z}^-\} = \boldsymbol{C}_4$ が $p_1 = C_{4z}^+$ が生成される部分群である．$p_1 = C_{4z}^-$ の場合も $\boldsymbol{C}_4$ が生成される．

$p_1 = C_{2z}$ とすると $p_1^2 = E$ であるので，$\{p_1, p_1^2\} = \{C_{2z}, E\} = \boldsymbol{C}_{2z}$ が生成される．

同様に $p_1 = C_{2x}$ とすると $p_1^2 = E$ であるので，$\boldsymbol{C}_{2x} = \{E, C_{2x}\}$ が $p_1 = C_{2y}$ のとき $\boldsymbol{C}_{2y} = \{E, C_{2y}\}$ が，$p_1 = C_{2a}$ のとき $\boldsymbol{C}_{2a} = \{E, C_{2a}\}$ が，$p_1 = C_{2b}$ のとき $\boldsymbol{C}_{2b} = \{E, C_{2b}\}$ が生成される．

２個の生成元の場合

生成子が $\{p_1 = C_{4z}^+, p_2 = C_{2x}\}$ の場合は例 2.4 のように $\boldsymbol{D}_4$ が生成される．生成元が $\{p_1 = C_{4z}^+, p_2 = C_{2y}\}$，$\{p_1 = C_{4z}^+, p_2 = C_{2a}\}$，$\{p_1 = C_{4z}^+, p_2 = C_{2b}\}$ の場合も同様に $\boldsymbol{D}_4$ が生成される．

生成元が $\{p_1 = C_{2z}, p_2 = C_{2x}\}$ のとき

$$\begin{aligned} C_{2z}C_{2x} &= C_{2y} \\ C_{2y}C_{2x} &= C_{2z} \\ C_{2y}C_{2z} &= C_{2x} \\ C_{2z}^2 &= C_{2x}^2 = C_{2y}^2 = E \end{aligned} \tag{2.9}$$

であるので $\{E, C_{2z}, C_{2x}, C_{2y}\} = \boldsymbol{D}_2$ が生成される．生成元が $\{p_1 = C_{2z}, p_2 = C_{2y}\}$ の場合も $\boldsymbol{D}_2$ が生成される．

同様に生成元が $\{p_1 = C_{2z}, p_2 = C_{2a}\}$，$\{p_1 = C_{2z}, p_2 = C_{2b}\}$ のとき $\{E, C_{2z}, C_{2a}, C_{2b}\} = \boldsymbol{C}_{2a}$ が生成される．

生成元が $\{C_{2x}, C_{2a}\}$，$\{C_{2x}, C_{2b}\}$，$\{C_{2y}, C_{2a}\}$，$\{C_{2y}, C_{2b}\}$ の場合は $\boldsymbol{D}_4$ が生成される．

以上をまとめると $\boldsymbol{D}_4$ の部分群は表 2.4 のようになることが分かる．▮

$\boldsymbol{D}_4$	$=$	$\{E, C_{4z}^+, C_{2z}, C_{4z}^-, C_{2x}, C_{2y}, C_{2a}, C_{2b}\}$	*
$\boldsymbol{C}_4$	$=$	$\{E, C_{4z}^+, C_{2z}, C_{4z}^-\}$	*
$\boldsymbol{D}_2$	$=$	$\{E, C_{2z}, C_{2x}, C_{2y}\}$	*
$\boldsymbol{D}_{2a}$	$=$	$\{E, C_{2z}, C_{2a}, C_{2b}\}$	*
$\boldsymbol{C}_{2z}$	$=$	$\{E, C_{2z}\}$	*
$\boldsymbol{C}_{2x}$	$=$	$\{E, C_{2x}\} \sim \boldsymbol{C}_{2y}$	
$\boldsymbol{C}_{2y}$	$=$	$\{E, C_{2y}\} \sim \boldsymbol{C}_{2x}$	
$\boldsymbol{C}_{2a}$	$=$	$\{E, C_{2a}\} \sim \boldsymbol{C}_{2b}$	
$\boldsymbol{C}_{2b}$	$=$	$\{E, C_{2b}\} \sim \boldsymbol{C}_{2a}$	
$\boldsymbol{C}_1$	$=$	$\{E\}$	*

表 2.4: $\boldsymbol{D}_4$ の部分群．*印は $\boldsymbol{D}_4$ の正規部分群を示す．$\sim$ は共役関係を示す．

「$\boldsymbol{D}_4$ 不変な系の対称性が破れるとき，表 2.4 の部分群のうちどのような部分群に移行するか」に答えるのが重要な問題になる．この種の問題の一般論を解説するのがこの解説の目的である．

共役元と共役部分群　群 G の二つの元 $a, b \in G$ に対して $b = gag^{-1}$ なる G の元 g が存在するとき，b は a に共役 (conjugate) な元という．

元 a に共役な元すべての集合を，a の共役類または類と呼ぶ．a の類に属する元は
$G = \{g_1 = E, g_2, \cdots, g_n\}$ とするとき

$$g_1 a g_1^{-1}, \quad g_2 a g_2^{-1}, \quad \cdots \quad, g_n a g_n^{-1} \tag{2.10}$$

の系列で与えられる．ただしこの中には同じ元が重複してあらわれる．(2.10) と表 2.3 を使うと $\boldsymbol{D}_4$ の元は次の 5 個の類に類別される．

類	属する元	同類元の数
$\mathcal{C}_1$	E	1
$\mathcal{C}_2$	C_{2z}	1
$\mathcal{C}_3$	C_{4z}^+, C_{4z}^-	2
$\mathcal{C}_4$	C_{2x}, C_{2y}	2
$\mathcal{C}_5$	C_{2a}, C_{2b}	2

表 2.5: $\boldsymbol{D}_4$ の類.

$H, H' \in G$ が G の二つの部分群で

$$H' \;=\; gHg^{-1} \equiv \{gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1}, \cdots, gh_{|H|}g^{-1}\}, \tag{2.11}$$

なる $g \in G$ が存在するとき，H' を H の共役部分群 (conjugate subgroup) といい記号 $H' \sim H$ で表す．このの関係を H' と H は互いに共役であるという．後の章で互いに共役な部分群は物理的に同等な意味を持つことを示す．また特に任意の $g \in G$ に対して

$$H \;=\; gHg^{-1}, \tag{2.12}$$

が成り立つとき H を正規部分群 (normal subgroup) という．H が G の正規部分群であることを，記号

$$H \triangleleft G \tag{2.13}$$

で表す．

例 **2.6** $\boldsymbol{D}_4$ の共役部分群と正規部分群
表 2.3 を使って

$$\begin{aligned} C_{4z}^+ \boldsymbol{C}_{2x} C_{4z}^- = C_{4z}^+\{E, C_{2x}\}C_{4z}^- = \{C_{4z}^+ E C_{4z}^-, C_{4z}^+ C_{2x} C_{4z}^-)\} = \{E, C_{2y}\} = \boldsymbol{C}_{2y} \\ C_{4z}^+ \boldsymbol{C}_{2a} C_{4z}^- = C_{4z}^+\{E, C_{2a}\}C_{4z}^- = \{C_{4z}^+ E C_{4z}^-, C_{4z}^+ C_{2a} C_{4z}^-)\} = \{E, C_{2b}\} = \boldsymbol{C}_{2b} \end{aligned} \tag{2.14}$$

を得るので，$\boldsymbol{C}_{2x}$ は $\boldsymbol{C}_{2y}$ に，$\boldsymbol{C}_{2a}$ は $\boldsymbol{C}_{2b}$ に共役であることが分かる．表 2.3 を使えば表 2.4 のように $\boldsymbol{D}_4$, $\boldsymbol{C}_4$, $\boldsymbol{C}_{2z}$, $\boldsymbol{D}_2$, $\boldsymbol{D}_{2a}$, $\boldsymbol{C}_1$ は $\boldsymbol{D}_4$ の正規部分群であることが分かる．

2.2 商群と準同型定理

$H = \{h_1, h_2, \cdots, h_{|H|}\}$ が G の部分群であるとする．ある $g \in G$ に対して G の部分集合

$$gH = \{gh \mid h \in H\} = \{gh_1, gh_2, \cdots, gh_{|H|}\} \tag{2.15}$$

を H に関する**左剰余類** (left coset) という．gH の g を左剰余類 gH の**代表元** (coset representative) という．gH の任意の元 g' が左剰余類 gH の代表元になり得る．何故ならば $g' = gh_i \in gH$ とすると

$$g'H = gh_iH = g\{h_ih_1, h_ih_2, \cdots, h_ih_{|H|}\} = g\{h_1, h_2, \cdots, h_{|H|}\} = gH \tag{2.16}$$

ここで３番目の等式は部分群 H について組換え定理を使った．

すべての G の元は H の唯一つの左剰余類に属し，２個以上の左剰余類に属さない．なぜならば左剰余類 gH と kH が共通の元 a を持つとする．すなわち $a = gh_1 = kh_2$ $(h_1, h_2 \in H)$ とすると $g = kh_2h_1^{-1} \in kH$, したがって $gH \subseteq kH$. 同様に $k = gh_1h_2^{-1} \in gH$, したがって $kH \subseteq gH$. 故に $gH = kH$ となる．このことより G の元はどれか一つの左剰余類に属する．すなわち G は

$$G = g_1H + g_2H + \cdots + g_mH \tag{2.17}$$

と分解できる．これを**左剰余類分解**という．上式で記号 $+$ は集合としての和集合を取ることを意味する． 剰余類の個数 m を G における H の**指数** (index) といい，H を G の指数 m の部分群という．

同様に**右剰余類分解**は

$$G = Hg_1 + Hg_2 + \cdots + Hg_m \tag{2.18}$$

で定義される．以下 $\boldsymbol{D}_4$ の $\boldsymbol{D}_2, \boldsymbol{C}_4, \boldsymbol{C}_{2z}$ による左剰余類分解の例を示す．

例 2.7 $\boldsymbol{D}_4$ の $\boldsymbol{C}_{2z}, \boldsymbol{D}_2, \boldsymbol{C}_4$ による左剰余類分解

$\boldsymbol{D}_4$ の $\boldsymbol{C}_{2z}$ による左剰余類分解は次の様にして求められる．まず $g_1\boldsymbol{C}_{2z} = E\boldsymbol{C}_{2z} = \boldsymbol{C}_{2z} = \{E, C_{2z}\}$ が１つの剰余類である．次に $\boldsymbol{D}_4$ の元で剰余類 $g_1\boldsymbol{C}_{2z} = \{E, C_{2z}\}$ に属さない元，例えば C_{4z}^+ を選んで，$C_{4z}^+\boldsymbol{C}_2 = \{C_{4z}^+, C_{4z}^-\}$ なる剰余類を得る．つぎに剰余類 $\{E, C_{2z}\}$, $\{C_{4z}^+, C_{4z}^-\}$ に属さない $\boldsymbol{D}_4$ の元，例えば C_{2x} を選んで剰余類 $C_{2x}\boldsymbol{C}_{2z} = \{C_{2x}, C_{2y}\}$ を得る．さらに上記の３個の剰余類 $\{E, C_{2z}\}, \{C_{4z}^+, C_{4z}^-\}, \{C_{2x}, C_{2y}\}$ に属さない $\boldsymbol{D}_4$ の元，例えば C_{2a} を選んで剰余類 $C_{2a}\boldsymbol{C}_{2z} = \{C_{2a}, C_{2b}\}$ を得る．この４個の剰余類は $\boldsymbol{D}_4$ のすべての元を尽くしているので，$\boldsymbol{D}_4$ の $\boldsymbol{C}_{2z}$ による剰余類分解は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_4 &= \boldsymbol{C}_{2z} + C_{4z}^+\boldsymbol{C}_{2z} + C_{2x}\boldsymbol{C}_{2z} + C_{2a}\boldsymbol{C}_{2z} \\ &= \{E, C_{2z}\} + \{C_{4z}^+, C_{4z}^-\} + \{C_{2x}, C_{2y}\} + \{C_{2a}, C_{2b}\} \end{aligned} \tag{2.19}$$

ここで剰余類 $C_{4z}^+\boldsymbol{C}_{2z} = \{C_{4z}^+, C_{4z}^-\}$ の代表元として C_{4z}^+ を選んだが，代表元として剰余類 $\{C_{4z}^+, C_{4z}^-\}$ の中の他の元 C_{4z}^- を選んでも，$C_{4z}^-\boldsymbol{C}_{2z} = \{C_{4z}^-, C_{4z}^+\} = \{C_{4z}^+, C_{4z}^-\}$ となり，剰余類分解は代表元の選び方によらない．同様に $\boldsymbol{D}_4$ の $\boldsymbol{D}_2, \boldsymbol{C}_4$ による左剰余類分解は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_4 &= \boldsymbol{D}_2 + C_{4z}^{+}\boldsymbol{D}_2 = \{E, C_{2z}, C_{2x}, C_{2y}\} + \{C_{4z}^{+}, C_{4z}^{-}, C_{2a}, C_{2b}\} \\ \boldsymbol{D}_4 &= \boldsymbol{C}_4 + C_{2x}\boldsymbol{C}_4 = \{E, C_{4z}^{+}, C_{2z}, C_{4z}^{-}\} + \{C_{2x}, C_{2b}, C_{2y}, C_{2a}\} \end{aligned} \tag{2.20}$$

となる.

このように剰余類分解は部分群によって 1, 群の元をクラスに分けることを意味する. ▮

G の部分群 H が正規部分群 ($gHg^{-1} = H$) であるとき, すなわち任意の $g \in G$ に対して $gH = Hg$ のとき, 左剰余類と右剰余類は同じになる. G の正規部分群 H による左剰余類分解

$$G = g_1H + g_2H + \cdots + g_mH \tag{2.21}$$

を考える. 二つの剰余類 g_iH と g_jH に属する任意の元を一個ずつ (g_ih_i, g_jh_m とする) 選んでその積を取ると

$$g_ih_lg_jh_m = g_ig_j(g_j^{-1}h_lg_j)h_m = g_ig_jh_l^jh_m = g_ig_jh_k \tag{2.22}$$

ここで H が G の正規部分群であるので, $g_j^{-1}h_lg_j \in H$ であり, これを h_l^j と記し, $h_l^jh_m = h_k$ と記した. したがって剰余類 g_iH に属する元と, 剰余類 g_jH に属する元の積は剰余類 g_ig_jH に属することが分かる. これは

$$(g_iH)(g_jH) = g_ig_jH \tag{2.23}$$

と表される. これは剰余類の積は一つの剰余類になっていることを示す. 剰余類の集合はこのような積に関して群を作る. 剰余類を元とするこのような群を**剰余類群**, **商群**または**因子群** (factor group) といい,

$$G/H \tag{2.24}$$

と記す.

例 2.8 $\boldsymbol{D}_4/\boldsymbol{C}_{2z}$ の群表
(2.20) より $\boldsymbol{D}_4$ の正規部分群 $\boldsymbol{C}_{2z}$ による剰余類分解は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_4 &= \boldsymbol{C}_{2z} + C_{4z}^{+}\boldsymbol{C}_{2z} + C_{2x}\boldsymbol{C}_{2z} + C_{2a}\boldsymbol{C}_{2z} && (2.25) \\ &= \{E, C_{2z}\} + \{C_{4z}^{+}, C_{4z}^{-}\} + \{C_{2x}, C_{2y}\} + \{C_{2a}, C_{2b}\} && (2.26) \end{aligned}$$

と表される. $\boldsymbol{D}_4/\boldsymbol{C}_{2z}$ の群表は表 2.6 で示される. ▮

二つの群 G と G' があって G から G' への写像 $f : G \mapsto G'$ が定義されているとする. つまり $g \in G$ に対して $g' = f(g) \in G'$ である. このとき G の元の積 $g_ig_j = g_k$ に対して

$$f(g_i)f(g_j) = f(g_ig_j) = f(g_k) \tag{2.27}$$

	$\{E, C_{2z}\}$	$\{C_{4z}^+, C_{4z}^-\}$	$\{C_{2x}, C_{2y}\}$	$\{C_{2a}, C_{2b}\}$
$\{E, C_{2z}\}$	$\{E, C_{2z}\}$	$\{C_{4z}^+, C_{4z}^-\}$	$\{C_{2x}, C_{2y}\}$	$\{C_{2a}, C_{2b}\}$
$\{C_{4z}^+, C_{4z}^-\}$	$\{C_{4z}^+, C_{4z}^-\}$	$\{E, C_{2z}\}$	$\{C_{2a}, C_{2b}\}$	$\{C_{2x}, C_{2y}\}$
$\{C_{2x}, C_{2y}\}$	$\{C_{2x}, C_{2y}\}$	$\{C_{2a}, C_{2b}\}$	$\{E, C_{2z}\}$	$\{C_{4z}^+, C_{4z}^-\}$
$\{C_{2a}, C_{2b}\}$	$\{C_{2a}, C_{2b}\}$	$\{C_{2x}, C_{2y}\}$	$\{C_{4z}^+, C_{4z}^-\}$	$\{E, C_{2z}\}$

表 2.6: 商群 $\boldsymbol{D}_4/\boldsymbol{C}_{2z}$ の群表.

が成り立つときに, f を準同型写像 (homomorphism) という. f が一対一で準同型写像のとき, f は同型写像といい, G と G' は同型であるといい $G \cong G'$ と記す.

$f(G) = G'$ のとき, f を G から G' の上への準同型写像という. G から G' の上への準同型写像 f において G' の単位元 $E_{G'}$ 写像される G の元の集合:

$$\mathrm{Ker}\, f \;=\; \{g \in G \mid f(g) = E_{G'}\} \tag{2.28}$$

を準同型写像 f の核 (kernel) という. このとき次の命題が成り立つ.[10, 11]

定理 2.2 (準同型定理) 群 G から群 G' の上への準同型写像を f とすれば次の2命題が成り立つ.

(1) f の核 $K = \mathrm{Ker}\, f$ は G の正規部分群である.

(2) G/K から G' への同型写像があって $G/K \cong G'$ となる.

証明

(1) まず K が G の部分群であることを示す. $x, y \in K$ とすれば $f(x) = f(y) = E_{G'}$. f は準同型写像であるから $f(xy) = f(x)f(y) = E_{G'}E_{G'} = E_{G'}$, したがって $xy \in K$. また $f(x)f(x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(E_G) = E_{G'}$ $f(x) = E_{G'}$ より $f(x^{-1}) = E_{G'}$. したがって $x^{-1} \in K$. これより K は G の部分群である. f の核 K が G の正規部分群であることは $x \in K$ と任意の $g \in G$ に対して

$$f(gxg^{-1}) \;=\; f(g)f(x)f(g^{-1}) = f(g)E_{G'}f(g^{-1}) = f(g)f(g^{-1}) = f(gg^{-1}) = E_{G'} \tag{2.29}$$

となり $gxg^{-1} \in K$ となる. これより $K = \mathrm{Ker}\, f$ は G の正規部分群である.
(2) G/K から G' への写像 $\bar{f}$ を $gK \in G/K$ に対して,

$$\bar{f}(gK) \;=\; f(g) \tag{2.30}$$

と定義すると $\bar{f}$ は準同型である. なぜならば

$$\begin{aligned}\bar{f}(g_1Kg_2K) &= \bar{f}(g_1g_2g_2^{-1}Kg_2K) = \bar{f}(g_1g_2K)\\ &= f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = \bar{f}(g_1K)\bar{f}(g_2K)\end{aligned} \tag{2.31}$$

となるからである. ここで K が正規部分群であること, すなわち $g_2^{-1}Kg_2 = K$ を使った. $\bar{f}$ が同型写像であることは, gK が $\bar{f}$ の核に含まれているとすると

$$\bar{f}(gK) \;=\; f(g) = E_{G'} \tag{2.32}$$

となって $g \in K$ となり gK は G/K の単位元となるからである. 故に $G/K \cong G'$ を得る. ▮

例 2.9 C_4 から C_2 への準同型写像

C_4 から C_{2z} への写像を次の様に定義する $p \in C_4$ に対して $f(p) = pp$, すなわち

$$\begin{aligned} f(E) &= EE = E \\ f(C_{4z}^+) &= (C_{4z}^+)(C_{4z}^+) = C_{2z} \\ f(C_{2z}) &= (C_{2z})(C_{2z}) = E \\ f(C_{4z}^-) &= (C_{4z}^-)(C_{4z}^-) = C_{2z} \end{aligned} \tag{2.33}$$

これより

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\, f &= \{E, C_{2z}\} = C_2 \\ C_4/C_2 &= (C_2, C_{4z}^+ C_2) = (\{E, C_{2z}\}, \{C_{4z}^+, C_{4z}^-\}) \cong C_2 \end{aligned} \tag{2.34}$$

を得る.▮

準同型定理を少し一般化した次の定理が成立する.[8, 9]

定理 2.3 (第一同型定理) f を群 G から群 G' の上への準同型写像, H' を G' の正規部分群とすれば, $f^{-1}(H') = H$ は G の正規部分群であって,

$$G/H \cong G'/H' \tag{2.35}$$

が成り立つ. ($H' = E_{G'}$ の場合が準同型定理である)

証明

$G'/H' = G^*$ とおき, G^* の単位元を E^* とする. G' から G^* の上への写像 ϕ を $g' \in G'$ に対して

$$\phi(g') = (g'H') \tag{2.36}$$

で定義する. ここで $(g'H')$ は g' を含む H' による剰余類を表す. ϕ が準同型写像であることは

$$\begin{aligned} \phi(g_1')\phi(g_2') &= (g_1'H')(g_2'H') \\ &= (g_1'g_2'(g_2')^{-1}H'g_2'H') \\ &= (g_1'g_2'H') \\ &= \phi(g_1'g_2') \end{aligned} \tag{2.37}$$

より分かる. ここで H' が G' の正規部分群であること $(g_2')^{-1}H'g_2' = H'$ を使った. また $\phi^{-1}(E^*) = H'$. f は G から G' の上への準同型写像であるから, G から G^* の上への合成写像

$$G \xrightarrow[f]{} G' \xrightarrow[\phi]{} G^* \tag{2.38}$$

$(\phi \cdot f)$ は準同型写像である. $(\phi \cdot f)$ の核は

$$(\phi \cdot f)^{-1}(E^*) = f^{-1}(\phi^{-1}(E^*)) = f^{-1}(H') = H \tag{2.39}$$

となる. G から G^* の上への準同型写像 $(\phi \cdot f)$ に準同型定理を適用すれば

$$G/H \cong G^* = G'/H' \tag{2.40}$$

を得る. ▮

2.3 直積とその部分群

位数 m の群 H と位数 n の群 K を考える. H の元 h_i $(i = 1,2,\cdots,m)$ は K の元 k_j $(j = 1,2,\cdots,n)$ のすべてと交換可能とする. このとき集合 $\{h_ik_j \mid i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n\}$ は積を

$$(h_ik_j)\cdot(h_{i'}k_{j'}) \quad = \quad h_{i''}k_{j''} \tag{2.41}$$

と定義することによって群になる. ここで

$$\begin{aligned} h_{i''} &= h_ih_{i'} \\ k_{j''} &= k_jh_{j'} \end{aligned} \tag{2.42}$$

である. このようにして構成された群を $H\times K$ と書き, H と K の直積という.

例 **2.10** $(\boldsymbol{C}_4 \times \boldsymbol{C}_4^S)$
空間回転の群 $\boldsymbol{C}_4$ に対応するスピン回転の群

$$\boldsymbol{C}_4^S \quad = \quad \{E, u_{4z}^+, u_{2z}, u_{4z}^-\} \tag{2.43}$$

を考える. ここで u_{4z}^+ はスピンの z 軸のまわりの $\frac{2\pi}{4}$ 回転を表し C_{4z}^+ に対応するものである. 他の元も同様の意味を有するものとする. スピン軌道相互作用が弱い系ではスピン回転と空間回転は独立であって, それぞれの対称操作はお互いに交換する. 4 個の空間回転 $\boldsymbol{C}_4$ と 4 個のスピン回転の $4\times 4 = 16$ 個の元からなる直積群

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}_4 \times \boldsymbol{C}_4^S \quad = \quad & \{E, C_{4z}^+, C_{2z}, C_{4z}^-\} \\ & +\{u_{4z}^+, C_{4z}^+u_{4z}^+, C_{2z}u_{4z}^+, C_{4z}^-u_{4z}^+\} \\ & +\{u_{2z}, C_{4z}^+u_{2z}, C_{2z}u_{2z}, C_{4z}^-u_{2z}\} \\ & +\{u_{4z}^-, C_{4z}^+u_{4z}^-, C_{2z}u_{4z}^-, C_{4z}^-u_{4z}^-\} \end{aligned} \tag{2.44}$$

が考えられる. ▮

以下の章で対称性の破れに関連して, 直積の部分群を求めることが重要になる. $\boldsymbol{C}_4 \times \boldsymbol{C}_4^S$ の部分群にはどのようなものがあるかを考える. まず $\{\boldsymbol{C}_4$ の部分群 $\}\times\{\boldsymbol{C}_4^S$ の部分群 $\}$ のタイプのもの (直積型と呼ぶ) が考えられる. $\boldsymbol{C}_4$ の部分群は $\{\boldsymbol{C}_4, \boldsymbol{C}_{2z}, \boldsymbol{C}_1\}$ であり, 対応する $\boldsymbol{C}_4^S$ の部分群は $\{\boldsymbol{C}_4^S, \boldsymbol{C}_{2z}^S, \boldsymbol{C}_1^S\}$ であるのでこの直積型の部分群は

$$\begin{aligned} U_1 &= \boldsymbol{C}_4\times\boldsymbol{C}_4^S, & U_2 &= \boldsymbol{C}_4\times\boldsymbol{C}_{2z}^S, & U_3 &= \boldsymbol{C}_4\times\boldsymbol{C}_1^S \\ U_4 &= \boldsymbol{C}_{2z}\times\boldsymbol{C}_4^S, & U_5 &= \boldsymbol{C}_{2z}\times\boldsymbol{C}_{2z}^S, & U_6 &= \boldsymbol{C}_{2z}\times\boldsymbol{C}_1^S \\ U_7 &= \boldsymbol{C}_1\times\boldsymbol{C}_4^S, & U_8 &= \boldsymbol{C}_1\times\boldsymbol{C}_{2z}^S, & U_9 &= \boldsymbol{C}_1\times\boldsymbol{C}_1^S \end{aligned} \tag{2.45}$$

の 9 個存在する．直積型の部分群では，ある空間回転に対してスピン回転の対応する部分群 $\boldsymbol{C}_4^S, \boldsymbol{C}_{2z}^S, \boldsymbol{C}_1^S$ のすべてのスピン回転の元が結合している．直積型以外の部分群には次のものが存在する．

$$
\begin{aligned}
U_{10} &= \{E, C_{4z}u_{4z}^+, C_{2z}u_{2z}, C_{4z}^-u_{4z}^-\} \\
U_{11} &= \{E, C_{4z}u_{4z}^-, C_{2z}u_{2z}, C_{4z}^-u_{4z}^+\} \\
U_{12} &= \{(\boldsymbol{C}_{2z} \times \boldsymbol{C}_{2z}^S) + C_{4z}^+u_{4z}^+(\boldsymbol{C}_{2z} \times \boldsymbol{C}_{2z}^S)\} \\
&= \{E, C_{2z}, u_{2z}, C_{2z}u_{2z}, C_{4z}^+u_{4z}^+, C_{4z}^-u_{4z}^+, C_{4z}^+u_{4z}^-, C_{4z}^-u_{4z}^-\} \\
U_{13} &= \boldsymbol{C}_{2z} + C_{4z}^+u_{2z}\boldsymbol{C}_{2z} = \{E, C_{2z}, C_{4z}^+u_{2z}, C_{4z}^-u_{2z}\} \\
U_{14} &= \boldsymbol{C}_{2z}^S + C_{2z}\boldsymbol{C}_{2z}^S = \{E, u_{2z}, C_{2z}u_{4z}^+, C_{2z}u_{4z}^-\} \\
U_{15} &= \{E, C_{2z}u_{2z}\}
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

これらの群では，ある空間回転 (スピン回転) には，それに対応する特定のスピン回転 (空間回転) のみが結合している．例えば U_{10} では C_{4z}^+ には u_{4z}^+ だけが結合しており，U_{13} では C_{4z}^+ には u_{2z} のみが結合している．これらの部分群を非直積型と呼ぶ．このように $\boldsymbol{C}_4 \times \boldsymbol{C}_4^S$ といった簡単な直積群でも多くの部分群が存在することが分かる．一般的に群 H と K の直積 $G = H \times K$ の部分群で直積型の部分群は容易に求められるが，非直積型の部分群を求めることは直感的な方法では困難である．幸いなことに $G = H \times K$ の部分群を系統的に求める手法を与える，次の定理が存在する．[8, ?]

定理 2.4 (直積 $H \times K$ の部分群) H と K の部分群 H_a, K_a とそれらの正規部分群 H_0 ($\triangleleft$ H_a), K_0 ($\triangleleft$ K_a) が与えられているとする．さらに商群 H_a/H_0 と K_a/K_0 の間に同型写像 θ

$$\theta \ : \ H_a/H_0 \Longrightarrow K_a/K_0 \tag{2.47}$$

があるものと仮定する．すなわち剰余類分解

$$
\begin{aligned}
H_a &= h_1H_0 + h_2H_0 + \cdots + h_iH_0 + \cdots + h_mH_0 \\
K_a &= k_1K_0 + k_2K_0 + \cdots + k_iK_0 + \cdots + k_mK_0
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

において同型対応

$$\theta(h_iH_0) \ = \ (k_iK_0) \tag{2.49}$$

が成り立つと仮定する．ここで $h_1 = E_H$, $k_1 = E_K$ である．そのとき

$$U \ = \ h_1k_1H_0K_0 + h_2k_2H_0K_0 + \cdots + h_ik_iH_0K_0 + \cdots + h_mk_mH_0K_0 \tag{2.50}$$

は直積 $H \times K$ の部分群である．

逆に直積 $H \times K$ の任意の部分群 U には，それに対応する部分群 $H_a \in H$, $K_a \in K$ とそれらの正規部分群 H_0 ($\triangleleft$ H_a), K_0 ($\triangleleft$ K_a) が存在し，H_a/H_0 と K_a/K_0 の間の (2.49) の形の同型写像 θ が定まる．すなわち $H \times K$ の部分群 U は上記の条件を満たす H_a, H_0, K_a, K_0, θ で一意的に定まる．このように構成される部分群 U を

$$U \ = \ (H_a/H_b; K_a/K_b; \theta) \tag{2.51}$$

と記す．

証明[1] まず (2.50) の U が群である事を示す. H_0, K_0 の元を

$$\begin{aligned} H_0 &= \{h_1^0 = E_H, h_2^0, \cdots, h_{N_h}^0\} \\ K_0 &= \{k_1^0 = E_K, k_2^0, \cdots, k_{N_k}^0\} \end{aligned} \tag{2.52}$$

と表す. 同型関係 (2.49) より

$$h_i h_j \in h_l H_0 \tag{2.53}$$

ならば

$$k_i k_j \in k_l K_0 \tag{2.54}$$

である. U の任意の2元 $u_1 = h_i k_i h_s^0 k_t^0 \in h_i k_i H_0 K_0$ と $u_2 = h_j k_j h_u^0 k_v^0 \in h_j k_j H_0 K_0$ の積を考える. ここで $h_i, h_i \in H_a$, $k_i, k_j \in K_a$ である.

$$\begin{aligned} u_1 u_2 &= h_i k_i h_s^0 k_t^0 h_j k_j h_u^0 k_v^0 = h_i h_s^0 h_j h_u^0 k_i k_t^0 k_j k_v^0 \\ &= h_i h_j (h_j^{-1} h_s^0 h_j) h_u^0 k_i k_j (k_j^{-1} k_t^0 k_j) k_v^0 \\ &= h_i h_j k_i k_j (h_{s_j}^0 h_u^0)(k_{t_j}^0 k_v^0) \in h_l k_l H_0 K_0 \in U \end{aligned} \tag{2.55}$$

となり $u_1 u_2 \in U$ を満たす. ここで H_0, K_0 が H_a, K_a の正規部分群であることを使い, $h_{s_j}^0 = h_j^{-1} h_s^0 h_j \in H_0$, $k_{t_j}^0 = k_j^{-1} k_t^0 k_j \in K_0$ と置いた. また

$$\begin{aligned} u_1^{-1} &= (h_i k_i h_s^0 k_t^0)^{-1} = (k_t^0)^{-1} (h_s^0)^{-1} k_i^{-1} h_i^{-1} \\ &= (h_s^0)^{-1} h_i^{-1} (k_t^0)^{-1} k_i^{-1} \\ &= h_i^{-1} (h_i (h_s^0)^{-1} h_i^{-1}) k_i^{-1} (k_i k_t^0)^{-1} k_i^{-1}) \\ &= h_i^{-1} k_i^{-1} h_{s_i}^0 k_{t_i}^0 \in h_i^{-1} k_i^{-1} H_0 K_0 \subset U \end{aligned} \tag{2.56}$$

となって $u_1^{-1} \in U$ となる. ここで $h_{s_i}^0 = h_i h_s^0 h_i^{-1}$, $k_{t_i}^0 = k_i k_t^0 k_i^{-1}$ である. これより U が $H \times K$ の部分群であることが示された.

逆に $H \times K$ の任意の部分群 U が (2.50) の形に書けることを示そう. U は一般的に, H_a, K_a を H, K のある部分群として

$$U = \{hk \mid h \in H_a, k \in K_a\} \tag{2.57}$$

の形に書ける.

$G = H \times K$ の任意の元 $g = hk$ にたいして射影作用子 η, κ をつぎのように定義する.

$$\begin{aligned} \eta(hk) &= h \\ \kappa(hk) &= k \end{aligned} \tag{2.58}$$

G の部分群 U が与えられれば, U によって H, K の部分群

$$H_a = \eta(U), \quad H_0 = U \cap H, \quad K_a = \kappa(U), \quad K_0 = U \cap K \tag{2.59}$$

[1]証明はかなり長くなるので初回は省略し進んでください.

が定まる．H_0 は K の単位元 E_K と結合している U の元からなる群であり，K_0 は H の単位元 E_H と結合している U の元からなる群であって

$$\begin{aligned} H_0 &= \{(h_1^0 = E_H, h_2^0, \cdots, h_{N_H}^0)E_K\} \\ K_0 &= \{E_H(k_1^0 = E_K, k_2^0, \cdots, k_{N_K}^0)\} \end{aligned} \tag{2.60}$$

と書くことが出来る．E_K, E_H は群操作としては何もしないことであるから H_0、K_0 は H, K の部分群とみなしてよい．

H_0 の任意の元を $h_i^0 E_K$ として，任意の U の元 $g = hk$ $(h \in H_a, k \in K_a)$ に対して

$$gh_i^0 E_K g^{-1} = hkh_i^0 E_K k^{-1} h^{-1} = hh_i^0 h^{-1} E_K \tag{2.61}$$

は E_K に結合している U の元になる．したがってこれは H_0 に属する．すなわち

$$gH_0 g^{-1} \subset H_0 \tag{2.62}$$

同様にして $g^{-1}H_0 g \subset H_0$ を得るので，

$$H_0 \subset gH_0 g^{-1} \tag{2.63}$$

したがって

$$gH_0 g^{-1} = H_0 \tag{2.64}$$

となり H_0 は U の正規部分群である．また (2.61) より H_0 は H_a の正規部分群であることが分かる．同様に K_0 は U および K_a の正規部分群である．　したがって H_0K_0 は U の正規部分群である．

つぎに U の中で H_0 に結合している K_a の元を求めよう．$\sigma(u) \in H_0 = U \cap H$ と仮定する．すなわち $u = h_i^0 k \in U$ と置けば，$\sigma(u) = h_i^0 = h_i^0 E_K \in U$．したがって U の二つの元の積 $(\sigma(u))^{-1}u$ は

$$(\sigma(u))^{-1}u = (h_i^0)^{-1}h_i^0 k = k = \kappa(u) \in U \tag{2.65}$$

となり $\kappa(u)$ は U の元であり，K の元でもあるので，$\kappa(u) \in U \cap K = K_0$ を得る．逆に $\kappa(u) \in K_0$ ならば $\eta(u) \in H_0$ を得る．すなわち H_0 に結合している K の元は K_0 となる．したがって

$$(\sigma)^{-1}(H_0) = (H_0K_0) \tag{2.66}$$

を得る．準同型写像：

$$\sigma : U \Longrightarrow \eta(U) = H_a \tag{2.67}$$

において H_0 は $\eta(U) = H_a$ の正規部分群であり $\sigma^{-1}(H_0) = (H_0K_0)$ を考慮して第 1 同型定理を σ に適応すると，

$$U/(H_0K_0) \cong H_a/H_0 \tag{2.68}$$

を得る．同様にして

$$U/(H_0K_0) \cong K_a/K_0 \tag{2.69}$$

を得る. したがって

$$H_a/H_0 \ \cong K_a/K_0 \tag{2.70}$$

この同型写像を $\theta : H_a/H_0 \Longrightarrow K_a/K_0$ と記す. H_0K_0 は U の正規部分群であるので, (2.51) および剰余類分解 (2.50) を得る. ▮

例 2.11 $\boldsymbol{C_4 \times C_4^S}$ の部分群

定理2.4を $\boldsymbol{C_4 \times C_4^S}$ の場合に適用しよう. 群 $\boldsymbol{C_4}$ の部分群とその正規部分群は表2.7で与えられる. $\boldsymbol{C_4^S}$ の部分群とその正規部分群についても, 表2.7と同様な関係が得られる. $\boldsymbol{C_4}$ と $\boldsymbol{C_4^S}$ について商

部分群	正規部分群	商群
$\boldsymbol{C_4}$	$\boldsymbol{C_4}$	$\boldsymbol{C_4/C_4 \cong C_1}$
	$\boldsymbol{C_{2z}}$	$\boldsymbol{C_4/C_{2z} \cong C_{2z}}$
	$\boldsymbol{C_1}$	$\boldsymbol{C_4/C_1 \cong C_4}$
$\boldsymbol{C_{2z}}$	$\boldsymbol{C_{2z}}$	$\boldsymbol{C_{2z}/C_{2z} \cong C_1}$
	$\boldsymbol{C_1}$	$\boldsymbol{C_{2z}/C_1 \cong C_{2z}}$
$\boldsymbol{C_1}$	$\boldsymbol{C_1}$	$\boldsymbol{C_1/C_1 \cong C_1}$

表 2.7: $\boldsymbol{C_4}$ の部分群とその正規部分群.

群が同型になる組み合わせを取れば, $\boldsymbol{C_4 \times C_4^S}$ の部分群が得られる. 例えば $(\boldsymbol{C_4/C_1; C_4^S/C_1^S}; \theta_1)$

$(\boldsymbol{C_4/C_4; C_4^S/C_4^S})$	$=$	$\boldsymbol{C_4 \times C_4^S}$	U_1
$(\boldsymbol{C_4/C_4; C_2^S/C_2^S})$	$=$	$\boldsymbol{C_4 \times C_2^S}$	U_2
$(\boldsymbol{C_4/C_4; C_1^S/C_1^S})$	$=$	$\boldsymbol{C_4 \times C_1^S}$	U_3
$(\boldsymbol{C_4/C_2; C_4^S/C_2^S})$	$=$	$\boldsymbol{C_2 \times C_2^S} + C_{4z}^+u_{4z}^+\boldsymbol{C_2 \times C_2^S}$	U_{12}
$\boldsymbol{C_4/C_2; C_2^S/C_1^S})$	$=$	$\boldsymbol{C_2 \times C_1^S} + C_{4z}^+u_{2z}^+\boldsymbol{C_2 \times C_1^S}$	U_{13}
$(\boldsymbol{C_4/C_1; C_4^S/C_1^S}; \theta_1)$	$=$	$E + C_{4z}^+u_{4z}^+ + C_{2z}u_{2z} + C_{4z}^-u_{4z}^-$	U_{10}
$(\boldsymbol{C_4/C_1; C_4^S/C_1^S}; \theta_2)$	$=$	$E + C_{4z}^+u_{4z}^- + C_{2z}u_{2z} + C_{4z}^-u_{4z}^+$	U_{11}
$(\boldsymbol{C_2/C_2; C_4^S/C_4^S})$	$=$	$\boldsymbol{C_2 \times C_4^S}$	U_4
$(\boldsymbol{C_2/C_2; C_2^S/C_2^S})$	$=$	$\boldsymbol{C_2 \times C_2^S}$	U_5
$(\boldsymbol{C_2/C_2; C_1^S/C_1^S})$	$=$	$\boldsymbol{C_2 \times C_1^S}$	U_6
$(\boldsymbol{C_2/C_1; C_4^S/C_2^S})$	$=$	$\boldsymbol{C_1 \times C_2^S} + C_{2z}u_{4z}^+\boldsymbol{C_1 \times C_2^S}$	U_{14}
$(\boldsymbol{C_2/C_1; C_2^S/C_1^S})$	$=$	$E + C_{2z}u_{2z}$	U_{15}
$(\boldsymbol{C_1/C_1; C_4^S/C_4^S})$	$=$	$\boldsymbol{C_4^S}$	U_7
$(\boldsymbol{C_1/C_1; C_2^S/C_2^S})$	$=$	$\boldsymbol{C_2^S}$	U_8
$(\boldsymbol{C_1/C_1; C_1^S/C_1^S})$	$=$	$\{E\}$	U_9

表 2.8: $\boldsymbol{C_4 \times C_4^S}$ の部分群. 同型写像 θ が 1 種類の場合は θ を省略した.

の場合は, 式 (2.48) に対応して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C_4} &= E + C_{4z}^+ + C_{2z} + C_{4z}^- \\ \boldsymbol{C_4^S} &= E + u_{4z}^+ + u_{2z} + u_{4z}^- \end{aligned} \tag{2.71}$$

を得る．ここで同型写像 $\theta_1 : \boldsymbol{C}_4/\boldsymbol{C}_1 \mapsto \boldsymbol{C}_4^S/\boldsymbol{C}_1^S$ は

$$\theta_1(C_{4z}^+) \;=\; u_{4z}^+ \tag{2.72}$$

で定義される．(2.50) に対応して部分群

$$(\boldsymbol{C}_4/\boldsymbol{C}_1;\boldsymbol{C}_4^S/\boldsymbol{C}_1^S;\theta_1) \;=\; E + C_{4z}^+u_{4z}^+ + C_{2z}u_{2z} + C_{4z}^-u_{4z}^- \tag{2.73}$$

を得る．同型写像 $\theta_2 : \boldsymbol{C}_4/\boldsymbol{C}_1 \mapsto \boldsymbol{C}_4^S/\boldsymbol{C}_1^S$

$$\theta_2(C_{4z}^+) \;=\; u_{4z}^- \tag{2.74}$$

の場合は部分群

$$(\boldsymbol{C}_4/\boldsymbol{C}_1;\boldsymbol{C}_4^S/\boldsymbol{C}_1^S;\theta_2) \;=\; E + C_{4z}^+u_{4z}^- + C_{2z}u_{2z} + C_{4z}^-u_{4z}^+ \tag{2.75}$$

を得る．同様に $(\boldsymbol{C}_4/\boldsymbol{C}_{2z};\boldsymbol{C}_{2z}^S/\boldsymbol{C}_1^S;\theta)$ の場合には式 (2.48) に対応して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_4 &= \boldsymbol{C}_{2z} + C_{4z}\boldsymbol{C}_{2z}\\ \boldsymbol{C}_{2z}^S &= E + u_{2z}\end{aligned} \tag{2.76}$$

を得る．ここで同型写像 $\theta : \boldsymbol{C}_4/\boldsymbol{C}_{2z} \mapsto \boldsymbol{C}_{2z}^S/\boldsymbol{C}_1^S$ は

$$\theta(C_{4z}\boldsymbol{C}_{2z}) \;=\; u_{2z} \tag{2.77}$$

で定義される．(2.50) に対応して部分群

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{C}_4/\boldsymbol{C}_{2z};\boldsymbol{C}_{2z}^S/\boldsymbol{C}_1^S;\theta) &= \boldsymbol{C}_{2z} + C_{4z}u_{2z}\boldsymbol{C}_{2z}\\ &= \{E, C_{2z}, C_{4z}^+u_{2z}, C_{4z}^-u_{2z}\}\end{aligned} \tag{2.78}$$

を得る．このようにして求めた $\boldsymbol{C}_4 \times \boldsymbol{C}_4^S$ の可能なすべての部分群を表 2.8 に示す．このように定理 2.4 を使うと $\boldsymbol{C}_4 \times \boldsymbol{C}_4^S$ の部分群を系統的にもれなく求めることが出来る．▮

このように $G_0 = \boldsymbol{C}_4 \times \boldsymbol{C}_4^S$ のような比較的小さな群にも 15 個にも及ぶ部分群 G_j $(j = 1, 2, \cdots, 15)$ が存在する．この中からどのような部分群が対称性の破れの結果として現われるか？それが以後の章で考察する問題である．

第3章　既約表現

分岐現象を変分問題の解の分岐として捉えるとき, その変分空間 V の次元は非常に大きい. そこで V を対称性に基づいて, 部分空間の直和に分解すれば, より小さな次元の部分空間の中で解析を行い得ることが, 第4章で示される. この対称性に基づく部分空間への分解を行う上で既約表現が重要な役割を果たす. この章の目的は後の分岐理論を理解するための, 必要最小限の既約表現の基本的事項を解説することである. $G = \boldsymbol{D}_4$ を例にして, 既約表現の求め方を説明する. そのために必要な表現論の基本定理を述べる. それらの定理については, 標準的な群論の教科書「応用群論」(裳華房)[10)] や「群と表現」(岩波書店)[11)] に詳しく述べられているので, それらの定理の証明は省略する. $\boldsymbol{D}_4$ の既約表現を求めていく中で, それらの定理の意味と使い方が読者に修得されていくものと考える. $\boldsymbol{D}_4$ の場合の3次元空間 V_R^3 の既約分解の例を示す.

3.1　群の表現

群 $G = \{g_1 = E, g_2, \cdots, g_N\}$ の各元 g_i に対して n 行 n 列の行列 $D(g_i)$ が存在し, 積 $g_i g_j = g_k$ に対応して

$$D(g_i)D(g_j) \;=\; D(g_i g_k) = D(g_k) \tag{3.1}$$

が満たされるとき, $D(g_1), D(g_2), \cdots, D(g_N)$ の集まりを群 G の**表現**といい, n を**表現の次数**という. 特に行列 $D(g_i)$ がユニタリー行列の場合を**ユニタリー表現**という. 有限群とコンパクト群 (3次元回転群等) ではすべての表現はユニタリー表現にする事が出来る.[1] したがって以下表現はユニタリー表現と考える.[2] $g_i E = g_i$, $g_i g_i^{-1} = E$ より

$$\begin{aligned} D(g_i)D(E) &= D(g_i) \\ D(g_i)D(g_i^{-1}) &= D(E) \end{aligned} \tag{3.2}$$

となり

$$\begin{aligned} D(E) &= \mathbf{1}_n \\ D(g_i^{-1}) &= D(g_i)^{-1} \end{aligned} \tag{3.3}$$

を得る. ここで $\mathbf{1}_n$ は $n \times n$ の単位行列である. すべての $g_i \in G$ に 1×1 行列の1を対応させる表現を**恒等表現**という.

表現は具体的にはあるベクトル空間の変換行列として実現される. $V_C^n = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}_C$ を $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ を基底とする複素係数で張られる複素ベクトル空間とする. すなわち任意のベク

[1] 大井[10)] p 60 参照
[2] この解説で扱う群は有限群か3次元回転群等のコンパクト群である.

トル $v \in V_C^n$ は

$$v = \sum_{n=1}^{n} z_i e_i \tag{3.4}$$

と表される．ここで z_i は複素数である．

群 G の各元がベクトル空間 V_C^n に線形に作用[3] しているものとする．すなわち $g \in G$ が $e_s \in V_C^n$ に作用して

$$g \cdot e_s = \sum_{t=1}^{d} e_t D_{ts}(g) \tag{3.5}$$

と書けるものとする．これは次のように書くことが出来る．

$$\begin{aligned} g \cdot (e_1, e_2, \cdots, e_n) &= (g \cdot e_1, g \cdot e_2, \cdots, g \cdot e_n) \\ &= (e_1, e_2, \cdots, e_n) \begin{pmatrix} D_{11}(g) & D_{12}(g) & \cdots & D_{1n}(g) \\ D_{21}(g) & D_{22}(g) & \cdots & D_{2n}(g) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1}(g) & D_{n2}(g) & \cdots & D_{nn}(g) \end{pmatrix} \\ &= (e_1, e_2, \cdots, e_n) D(g) \end{aligned} \tag{3.6}$$

行列 $D(g)$ が表現をなすことは，$g_i g_j = g_k$ のとき

$$\begin{aligned} g_k \cdot (e_1, e_2, \cdots, e_n) &= g_i g_j \cdot (e_1, e_2, \cdots, e_n) \\ &= g_i(g_j(e_1, e_2, \cdots, e_n)) \\ &= g_i(e_1, e_2, \cdots, e_n) D(g_j) \\ &= (e_1, e_2, \cdots, e_n) D(g_i) D(g_j) \end{aligned} \tag{3.7}$$

一方

$$g_k \cdot (e_1, e_2, \cdots, e_n) = (e_1, e_2, \cdots, e_n) D(g_k) \tag{3.8}$$

これより

$$D(g_k) = D(g_i g_j) = D(g_i) D(g_j) \tag{3.9}$$

を得て，D が表現であることが分かる．このような D を V_C^n を表現空間とする表現と呼ぶ．

例 3.1 D_4 の表現

3 次元ユークリッド空間 $V_R^3 = \{e_1, e_2, e_3\}_R$ を考える．ここで e_1, e_2, e_3 はそれぞれ x, y, z 軸方向

[3] 複素数 z_1, z_1 に対して $g \cdot (z_1 v_1 + z_2 v_2) = z_1 g \cdot v_1 + z_2 g \cdot v_2$ を満たす作用を線形に作用するという．

の単位ベクトルとし, $\{A, B, \cdots\}_R$ は $A, B, \cdots$ を基底として実係数で張られるベクトル空間を意味する. これらの基底に $\boldsymbol{D}_4$ は次の様に作用する.

$$
\begin{array}{rclrclrcl}
E \cdot \boldsymbol{e}_1 & = & \boldsymbol{e}_1, & E \cdot \boldsymbol{e}_2 & = & \boldsymbol{e}_2, & E \cdot \boldsymbol{e}_3 & = & \boldsymbol{e}_3 \\
C_{4z}^+ \cdot \boldsymbol{e}_1 & = & \boldsymbol{e}_2, & C_{4z}^+ \cdot \boldsymbol{e}_2 & = & -\boldsymbol{e}_1, & C_{4z}^+ \cdot \boldsymbol{e}_3 & = & \boldsymbol{e}_3 \\
C_{2z} \cdot \boldsymbol{e}_1 & = & -\boldsymbol{e}_1, & C_{2z} \cdot \boldsymbol{e}_2 & = & -\boldsymbol{e}_2, & C_{2z} \cdot \boldsymbol{e}_3 & = & \boldsymbol{e}_3 \\
C_{4z}^- \cdot \boldsymbol{e}_1 & = & -\boldsymbol{e}_2, & C_{4z}^- \cdot \boldsymbol{e}_2 & = & \boldsymbol{e}_1, & C_{4z}^- \cdot \boldsymbol{e}_3 & = & \boldsymbol{e}_3 \\
C_{2x} \cdot \boldsymbol{e}_1 & = & \boldsymbol{e}_1, & C_{2x} \cdot \boldsymbol{e}_2 & = & -\boldsymbol{e}_2, & C_{2x} \cdot \boldsymbol{e}_3 & = & -\boldsymbol{e}_3 \\
C_{2y} \cdot \boldsymbol{e}_1 & = & -\boldsymbol{e}_1, & C_{2y} \cdot \boldsymbol{e}_2 & = & \boldsymbol{e}_2, & C_{2y} \cdot \boldsymbol{e}_3 & = & -\boldsymbol{e}_3 \\
C_{2a} \cdot \boldsymbol{e}_1 & = & \boldsymbol{e}_2, & C_{2a} \cdot \boldsymbol{e}_2 & = & \boldsymbol{e}_1, & C_{2a} \cdot \boldsymbol{e}_3 & = & -\boldsymbol{e}_3 \\
C_{2b} \cdot \boldsymbol{e}_1 & = & -\boldsymbol{e}_2, & C_{2b} \cdot \boldsymbol{e}_2 & = & -\boldsymbol{e}_1, & C_{2b} \cdot \boldsymbol{e}_3 & = & -\boldsymbol{e}_3
\end{array}
\tag{3.10}
$$

これより $g \in \boldsymbol{D}_4$ として

$$
g \cdot \boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{e}_j D_{ji}(g) \tag{3.11}
$$

とすれば, $D(g)$ は

$$
\begin{array}{rclrcl}
D(E) & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & D(C_{2x}) & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
D(C_{4z}^+) & = & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & D(C_{2y}) & = & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
D(C_{2z}) & = & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & D(C_{2a}) & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
D(C_{4z}^-) & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & D(C_{2b}) & = & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}
\tag{3.12}
$$

となる. これが表現になっていることは容易に確かめられる. ▮

群 G の二つの表現 D, D' の表現行列が正則な行列 T によって同値変換

$$
D'(g_i) = T^{-1} D(g_i) T, \; g_i \in G \tag{3.13}
$$

で関係付けるられるとき, D と D' は**同値** (equivalent) であるという. 表現があるベクトル空間の変換として定義されている場合は, 同値な表現は単なる**基底の変換**とみなす事が出来る. 基底の変換を

$$
(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots, \boldsymbol{e}'_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) T \tag{3.14}
$$

で表せば

$$(e_1, e_2, \cdots, e_n) \;=\; (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)T^{-1} \tag{3.15}$$

となる. $g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} g\cdot(e'_1, e'_2, \cdots, e'_n) &= g\cdot(e_1, e_2, \cdots, e_n)T \\ &= (e_1, e_2, \cdots, e_n)D(g)T \\ &= (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)T^{-1}D(g)T \\ &= (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)D'(g) \end{aligned} \tag{3.16}$$

ここで $D'(g) = T^{-1}D(g)T$ である. このように T で変換された基底 $(e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ に対する表現行列が $D'(g) = T^{-1}D(g)T$ である.

群 G の表現 D の表現行列 $D(g)$ $(g \in G)$ に同値変換を行うことによって

$$D(g) \;=\; \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

のようにブロック対角化できたとき, 表現 D は**可約** (reducible) であるという. 可約でない表現を**既約** (irreducible) または**既約表現** (irrerucible representation) という. (3.17) で D_1, D_2 は群 G の表現になっている. このとき表現 D は D_1 と D_2 の**直和**であるといい,

$$D \;=\; D_1 \oplus D_2 \tag{3.18}$$

と表す. (3.17) をもたらす同値変換 T で変換された基底は二つのグループに別れ, それぞれで張られる部分ベクトル空間を $V_C^{n_1} = \{e_1^1, \cdots, e_{n_1}^1\}_C$, $V_C^{n_2} = \{e_1^2, \cdots, e_{n_2}^2\}_C$, $(n = n_1 + n_2)$ とすれば, V_C^n は

$$V_C^n \;=\; V_C^{n_1} \oplus V_C^{n_2} \tag{3.19}$$

と直和に書ける. (3.17) はすべての $g \in G$ と $v_1 \in V_C^{n_1}$, $v_2 \in V_C^{n_2}$ に対して

$$\begin{aligned} g\cdot v_1 &\in V_C^{n_1} \\ g\cdot v_2 &\in V_C^{n_2} \end{aligned} \tag{3.20}$$

を意味する. このような部分空間を G に関する**不変部分空間**という. 表現が既約であるとは, どのように基底をとっても表現空間を G に関して不変な部分空間に分けられないということである. そのような表現空間を**既約表現空間**という. 表現空間を既約表現空間の直和に分解することを**群 G に関する既約直和分解**という.

例 3.2 V_R^3 の $\boldsymbol{D_4}$ に関する既約直和分解

例 3.1 の $\boldsymbol{D_4}$ の表現 (3.12) はすべて

$$D(g) \;=\; \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

の形をしているので可約であり, 表現空間 V_R^3 は $\boldsymbol{D}_4$ に不変な部分空間の直和

$$V_R^3 \;=\; \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}_R \oplus \{\boldsymbol{e}_3\}_R \tag{3.22}$$

に既約分解される. ▮

例 3.3 V_R^3 の $\boldsymbol{D}_2$ に関する既約直和分解
(3.10) より $\{\boldsymbol{e}_1\}_R$, $\{\boldsymbol{e}_2\}_R$, $\{\boldsymbol{e}_3\}_R$ が $G = \boldsymbol{D}_2 = \{e, C_{2z}, C_{2x}, C_{2y}\}$ に関して不変部分空間であることが分かる. V_R^3 の $\boldsymbol{D}_2$ に関する既約直和分解は

$$V_R^3 \;=\; \{\boldsymbol{e}_1\}_R \oplus \{\boldsymbol{e}_2\}_R \oplus \{\boldsymbol{e}_3\}_R \tag{3.23}$$

▮

例 3.4 V_R^3 の $\boldsymbol{D}_{2a}$ に関する既約直和分解
$G = \boldsymbol{D}_{2a}$ の場合は $\{\boldsymbol{e}_1\}_R$, $\{\boldsymbol{e}_2\}_R$ は $\boldsymbol{D}_{2a}$ に関して不変部分空間ではない. $\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)\}_R$ および $\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2)\}_R$ が $\boldsymbol{D}_{2a}$ の不変部分空間であることは容易に確かめられる. したがって V_R^3 の $\boldsymbol{D}_{2a}$ に関する既約直和分解

$$V_R^3 \;=\; \{\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)\}_R \oplus \{\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2)\}_R \oplus \{\boldsymbol{e}_3\}_R \tag{3.24}$$

を得る. ▮

このようにベクトル空間の既約直和分解は考察する群によって異なる.

3.2 表現論の基本定理

群 G が与えられたとき, どのような既約表現が存在するかを知ることが重要である. そのための一般的な基本定理を述べる. 定理の証明は標準的な群論の教科書[10, 11]に記載されているので, それらを参照されたい.

定理 3.1 表現のユニタリー化
有限群の表現は同値変換によってユニタリー表現（表現行列 $D(g)$ がユニタリー行列）にすることができる.

定理 3.2 シューアの補題 2
群 G の表現 D が既約ならばすべての $g \in G$ に対して

$$D(g)M \;=\; MD(g) \tag{3.25}$$

を満たす行列 M は単位行列 $\mathbf{1}$ に複素数 c を掛けた

$$M \;=\; c\mathbf{1} \tag{3.26}$$

である.

定理 3.3 表現の直交性定理

群 G の二つの既約表現 $D^{(\alpha)}(g)$ と $D^{(\beta)}(g)$ の行列要素は次の直交関係を満たす.

$$\sum_{g\in G} D^{(\alpha)}_{ij}(g)^* D^{(\beta)}_{kl}(g) \quad = \quad \frac{|G|}{d_\alpha}\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{\alpha\beta} \tag{3.27}$$

ここで d_α は表現 $D^{(\alpha)}$ の次元, $\delta_{\alpha\beta}$ は α と β が同一の既約表現のとき 1, 異なるときゼロとする.

群の表現 $D(g)$ の対角要素の和

$$\chi(g) \quad = \quad \mathrm{tr}(D(g)) = \sum_{i=1}^{d} D_{ii}(g) \tag{3.28}$$

を表現 $D(g)$ の指標という. ある表現表現が既約であるか否か, 二つの既約表現が同値であるか否かが, 次のように指標によって判定できる.

定理 3.4 指標の第一種直交性定理

G の既約表現 $D^\alpha(g)$ と $D^\beta(g)$ の指標を $\chi^\alpha(g), \chi^\beta(g)$ とすると指標は次の直交関係を満たす.

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi^\alpha(g)\chi^\beta(g)^* \quad = \quad \delta_{\alpha,\beta} \tag{3.29}$$

同値でない既約表現の個数数 n_r については次の定理がある.

定理 3.5 類の数と既約表現の数

群 G の同値でない既約表現の個数 n_r と群 G の類の個数 n_c は等しい.

既約表現の次元数については次の定理がある.

定理 3.6 既約表現の次元数

同値でない既約表現の次元数の 2 乗の和は群の位数 $|G|$ に等しい.

$$d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_{n_r}^2 = |G| \tag{3.30}$$

群 G が $G = H + lH$ と指数 2 の部分群 H で剰余類分解されている場合, H は G の正規部分群である. なぜならば $h_1, h_2 \in H$ に対して

$$(lh_2)h_1(lh_2)^{-1} \quad = \quad lh_2h_1h_2^{-1}l^{-1} = lh_1'l^{-1} \tag{3.31}$$

が成り立つ. ここで $h_1' = h_2h_1h_2^{-1} \in H$ と置いた. これが H の元でないと仮定する. すなわち $lh_1'l^{-1} = lh_3$ $(h_3 \in H)$ とすれば $h_1'l^{-1} = h_3$ を得る. この両辺の逆元を取れば $h_3^{-1} = l(h_1')^{-1}$ となって h_3 が H に属さぬことになって矛盾する. したがって (3.31) の $(lh_2)h_1(lh_2)^{-1}$ は H に属し, H は正規部分群であることが分かる. 同様な方法で任意の $h \in H$ に対してて $l^{-1}hl \in H$ を示すことが出来る.

$G = H + lH$ の場合, 次の定理により H の既約表現より G の既約表現が構成される.

定理 3.7 指数 2 の部分群による誘導表現[4]

群 $G=H+lH$ の全ての既約表現は, 次の様に部分群 H の既約表現 ($d^\gamma(h)$ と記す) によって構成される.

(a) $d^\gamma(h)$ が $d^\gamma(l^{-1}hl)$ に同値でない場合.

G の表現 $D^\gamma(g)$ は次式で与えられる.

$$
\begin{aligned}
D^\gamma(h) &= \begin{pmatrix} d^\gamma(h) & 0 \\ 0 & d^\gamma(l^{-1}hl) \end{pmatrix} \\
D^\gamma(lh) &= \begin{pmatrix} 0 & d^\gamma(lhl) \\ d^\gamma(h) & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

(b) $d(h)$ が $d(l^{-1}hl)$ に同値の場合.

すなわち $d(l^{-1}hl)=U^{-1}d(h)U$ なるユニタリー行列 Uが存在する場合, H の既約表現 $d^\gamma(h)$ から導かれる G の既約表現は 2 個存在して, 次式で与えられる.

$$
\begin{aligned}
D^{\pm\gamma}(h) &= d^\gamma(h) \\
D^{\pm\gamma}(lh) &= \pm U d^\gamma(h)
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

証明

(a) の場合.

(3.32) の行列 D^γ が表現になっていることは, $lh_1lh_2,\ lhl\in H$ 等に注意して例えば

$$
\begin{aligned}
D^\gamma(h_1)D^\gamma(h_2) &= \begin{pmatrix} d^\gamma(h_1) & 0 \\ 0 & d^\gamma(l^{-1}h_1l) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d^\gamma(h_2) & 0 \\ 0 & d^\gamma(l^{-1}h_2l) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d^\gamma(h_1h_2) & 0 \\ 0 & d^\gamma(l^{-1}h_1ll^{-1}h_2l) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d^\gamma(h_1h_2) & 0 \\ 0 & d^\gamma(l^{-1}h_1h_2l) \end{pmatrix} = D^\gamma(h_1h_2) \\
D^\gamma(lh_1)D^\gamma(lh_2) &= \begin{pmatrix} 0 & d^\gamma(lh_1l) \\ d^\gamma(h_1) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & d^\gamma(lh_2l) \\ d^\gamma(h_2) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d\gamma(lh_1l)d^\gamma(h_2) & 0 \\ 0 & d^\gamma(h_1)d^\gamma(lh_2l) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d\gamma(lh_1lh_2) & 0 \\ 0 & d^\gamma(h_1lh_2l) \end{pmatrix} = D^\gamma(lh_1lh_2)
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

[4]誘導表現 (induced representation)[10] といわれる構成法の H が指数 2 の特別な場合にあたる.

等から確かめられる. 既約表現 $d^\gamma(h)$ の指標を $\eta^\gamma(h)$ とし表現 $D^\gamma(g)$ の指標を $\chi^\gamma(g)$ とすれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\chi^\gamma(g)|^2 &= \frac{1}{2|H|}\sum_{h\in H}(\eta^\gamma(h)+\eta^\gamma(l^{-1}hl))(\eta^\gamma(h)+\eta^\gamma(l^{-1}hl))^* \\ &= \frac{1}{2|H|}\sum_{h\in H}\{|\eta^\gamma(h)|^2+|\eta^\gamma(l^{-1}hl)|^2\}=1 \end{aligned}\tag{3.35}$$

ここで表現 $d^\gamma(h)$ の既約性と, 表現 $d(l^{-1}hl)$ の同値でないこと

$$\begin{aligned}\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}|\eta^\gamma(h)|^2=\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}|\eta^\gamma(l^{-1}hl)|^2 &= 1 \\ \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\eta^\gamma(h)\eta^\gamma(l^{-1}hl)^* &= 0\end{aligned}\tag{3.36}$$

を使った. これより $D^\gamma(g)$ が既約であることが分かる.

(b) の場合.

(3.33) の表現の指標は

$$\begin{aligned}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\chi^{\pm\gamma}(g)|^2 &= \frac{1}{2|H|}\sum_{h\in H}\{|\eta^\gamma(h)|^2 \\ &\quad +(\pm\sum_{mn}U_{mn}d^\gamma_{nm}(h))(\pm\sum_{m'n'}U^*_{m'n'}d^\gamma_{n'm'}(h)^*)\} \\ &= \frac{1}{2|H|}\sum_{h\in H}\{|H|+\frac{|H|}{|d^\gamma|}\sum_{mn}U_{mn}U^\dagger_{nm}\}=1\end{aligned}\tag{3.37}$$

となる. ここで $|d^\gamma|$ は既約表現 d^γ の次元であり, $d^\gamma(h)$ の直交性と U のユニタリー性を使った. したがって (3.33) の表現は既約である.

上記の既約表現は

$$\frac{1}{2}\sum_{\gamma\in\ \text{case (a)}}(2|d^\gamma|)^2+\sum_{\gamma\in\ \text{case (b)}}(|d^\gamma|^2+|d^\gamma|^2) = 2\sum_{\text{all }\gamma}|d^\gamma|^2=2|H|=|G| \tag{3.38}$$

を満たし, 定理 3.6 の (3.30) より G の既約表現を尽くしている. ここで (3.38) の最初の $\frac{1}{2}$ は case (a) では $d^\gamma(h)$ と $d^\gamma(l^{-1}hl)$ は H の表現としては同値でない既約表現であるが, それらから誘導された表現 $D^\gamma(g)$ は同値な表現を与えるからである. ∎

3.3　D_4 の既約表現

第 3.2 節の諸定理を使って群 $\boldsymbol{D}_4$ の既約表現をすべて求めよう. $\boldsymbol{D}_4=\boldsymbol{C}_4+C_{2x}\boldsymbol{C}_4$ であるので, まず $\boldsymbol{C}_4$ の既約表現を求めよう.

C_4 の既約表現

生成元を $r=C^+_{4z}$ とすると $\boldsymbol{C}_4$ は $r^4=E$ となる元 r のべき $\{E,r,r^2,r^3\}$ よりなる. $\boldsymbol{C}_4$ は任意の $p_1,p_2\in\boldsymbol{C}_4$ に対して

$$p_1p_2 = p_2p_1 \tag{3.39}$$

が成り立つ.[5] C_4 の既約表現を D とすれば (3.39) より

$$D(p_1)D(p_2) \quad = \quad D(p_2)D(p_1) \tag{3.40}$$

が成り立つ. すべての $p_1 \in C_4$ について (3.40) が成り立ち, $D(p_2) = M$ とすれば, 定理 3.2 より

$$M = D(p_2) = c(p_2)\mathbf{1} \tag{3.41}$$

ここで $c(p_2)$ は p_2 に依存する複素数である. p_2 は C_4 の任意の元であるので, D の次元が 2 以上で有れば D が可約となるので, C_4 の既約表現 D はすべて 1 次元表現でなければならない.[6]

1 次元既約表現の行列 $D(g)$ は指標 $\chi(g)$ と等しいので

$$\chi(p_1)\chi(p_2) \quad = \quad \chi(p_1p_2) \tag{3.42}$$

が成り立つ. z を複素数として $\chi(r) = z$ とすれば $\chi(r^4) = \chi(r)^4 = z^4$ を得る. 一方 $r^4 = E$ であるので $\chi(r^4) = \chi(E) = 1$ となり, $z^4 = 1$ を得る. したがって $z = e^{\frac{2\pi i h}{4}}$ $(h = 0, 1, 2, 3)$ を得る. したがって 4 個の一次元表現が得られる. その指標は

$$\chi_h(r^k) \quad = \quad e^{\frac{2\pi i h k}{4}} \ (h, k = 0, 1, 2, 3) \tag{3.43}$$

4 個の既約表現はマリケンの記号では $h = 0, 1, 2, 3$ に対応して A, ${}^2E$, B, ${}^1E$ と記されている. また定理 3.6 より各表現の次元 d_h は $d_h = 1$ $(h = 0, \cdots 3)$ で

$$d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \quad = \quad 4 = |C_4| \tag{3.44}$$

となり, 上の 4 個で C_4 の既約表現が全て尽くされていることが分かる. 既約の指標を表 3.1 にまとめる.

	E	C_{2z}	C_{4z}^+	C_{4z}^-	h
A	1	1	1	1	0
B	1	+	-1	-1	2
${}^1E$	1	-1	$-i$	i	3
${}^2E$	1	-1	i	$-i$	1

表 3.1: C_4 の既約表現の指標. $A, B,{}^1E,{}^2E$ の記号は Mulliken によるものである.

D_4 の既約表現

$D_4 = C_4 + C_{2x}C_4$ において C_4 の既約表現が全て得られたので, $l = C_{2x}, H = C_4, G = D_4$ として, 定理 3.7 を適用すると, D_4 の全ての既約表現を求めることが出来る.

(1) C_4 の A 表現 $(h = 0)$ の場合.

A 表現の指標を $\eta^A(p)$ $(p \in C_4)$ とすると, 全ての $p \in C_4$ に対して $\eta^A(p) = 1$. それゆえ

$$\eta^A(C_{2x}^{-1}pC_{2x}) \quad = \quad \eta^A(p^{-1}) = 1 = \eta^A(p) \tag{3.45}$$

[5]このような群を可換群という

[6]同様にして可換群の既約表現はすべて 1 次元表現になる.

となって, 定理 3.7 の (b) の場合になり, $U=1$ である. したがって A 表現より誘導される $\boldsymbol{D}_4$ の既約表現 $\chi^{\pm A}$ は

$$\begin{aligned}\chi^{\pm A}(p) &= 1 \quad \text{for } p\in \boldsymbol{C}_4\\ \chi^{\pm A}(C_{2x}p) &= \pm 1 \quad \text{for } p\in \boldsymbol{C}_4\end{aligned} \tag{3.46}$$

となる. マリケンの記号では χ^{+A} を A_1 表現, χ^{-A} を A_2 表現という.

(2) $\boldsymbol{C}_4$ の B 表現 $(h=2)$ の場合.

B 表現の指標を $\eta^B(p)$ $(p\in \boldsymbol{C}_4)$ とすると,

$$\begin{aligned}\eta^B(E) &= \eta^B(C_{2z})=1\\ \eta^B(C_{4z}^+) &= \eta^B(C_{4z}^-)=-1\end{aligned} \tag{3.47}$$

である. また

$$\begin{aligned}C_{2x}^{-1}C_{2z}C_{2x} &= C_{2z}\\ C_{2x}^{-1}C_{4z}^+C_{2x} &= C_{4z}^-\\ C_{2x}^{-1}C_{4z}^-C_{2x} &= C_{4z}^+\end{aligned} \tag{3.48}$$

であるので, $p\in \boldsymbol{C}_4$ に対して $\eta^B(C_{2x}^{-1}pC_{2x})=\eta^B(p)$ となり, 定理 3.7 の (b) の場合で $U=1$ である. したがって B 表現より誘導される $\boldsymbol{D}_4$ の既約表現 $\chi^{\pm B}$ は

$$\begin{aligned}\chi^{\pm B}(E) &= \chi^{\pm B}(C_{2z})=1\\ \chi^{\pm B}(C_{4z}^+) &= \chi^{\pm B}(C_{4z}^-)=-1\\ \chi^{\pm B}(C_{2x}) &= \chi^{\pm B}(C_{2y})=\pm 1\\ \chi^{\pm B}(C_{2a}) &= \chi^{\pm B}(C_{2b})=\mp 1\end{aligned} \tag{3.49}$$

となる. マリケンの記号では χ^{+B} を B_1 表現, χ^{-B} を B_2 表現という.

(3) $\boldsymbol{C}_4$ の ${}^2E$ 表現 $(h=1)$ の場合.

${}^2E$ 表現の指標を $\eta^{{}^2E}(p)$ $(p\in \boldsymbol{C}_4)$ とすると,

$$\begin{aligned}\eta^{{}^2E}(E) &= 1\\ \eta^{{}^2E}(C_{4z}^+) &= i\\ \eta^{{}^2E}(C_{2z}) &= -1\\ \eta^{{}^2E}(C_{4z}^-) &= -i\end{aligned} \tag{3.50}$$

である. また (3.48) より $\eta^{{}^2E}(C_{2x}^{-1}C_{4z}^+C_{2x})=\eta^{{}^2E}(C_{4z}^-)=-i\neq\eta^{{}^2E}(C_{4z}^+)$ となり, 定理 3.7 の (a) の場合になる. したがって ${}^2E$ 表現より誘導される $\boldsymbol{D}_4$ の既約表現 $D^{{}^2E}$ は次式のようになる.

$$\begin{aligned}D^{{}^2E}(E) &= \begin{pmatrix}\eta^{{}^2E}(E) & 0\\ 0 & \eta^{{}^2E}(C_{2x}^{-1}EC_{2x})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\ D^{{}^2E}(C_{4z}^+) &= \begin{pmatrix}\eta^{{}^2E}(C_{4z}^+) & 0\\ 0 & \eta^{{}^2E}(C_{2x}^{-1}C_{4z}^+C_{2x})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}\\ D^{{}^2E}(C_{2z}) &= \begin{pmatrix}\eta^{{}^2E}(C_{2z}) & 0\\ 0 & \eta^{{}^2E}(C_{2x}^{-1}C_{2z}C_{2x})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\ D^{{}^2E}(C_{4z}^-) &= \begin{pmatrix}\eta^{{}^2E}(C_{4z}^-) & 0\\ 0 & \eta^{{}^2E}(C_{2x}^{-1}C_{4z}^-C_{2x})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$
\begin{aligned}
D^{2E}(C_{2x}E) &= D^{2E}(C_{2x}) = \begin{pmatrix} 0 & \eta^{2E}(C_{2x}EC_{2x}) \\ \eta^{2E}(E) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
D^{2E}(C_{2x}C_{4z}^{+}) &= D^{2E}(C_{2b}) = \begin{pmatrix} 0 & \eta^{2E}(C_{2x}C_{4z}^{+}C_{2x}) \\ \eta^{2E}(C_{4z}^{+}) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
D^{2E}(C_{2x}C_{2z}) &= D^{2E}(C_{2y}) = \begin{pmatrix} 0 & \eta^{2E}(C_{2x}C_{2z}C_{2x}) \\ \eta^{2E}(C_{2z}) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
D^{2E}(C_{2x}C_{4z}^{-}) &= D^{2E}(C_{2a}) = \begin{pmatrix} 0 & \eta^{2E}(C_{2x}C_{4z}^{-}C_{2x}) \\ \eta^{2E}(C_{4z}^{-}) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

$\boldsymbol{C}_4$ の ${}^1E$ 表現から誘導してもこの表現と同値な既約表現を得る.

この表現行列は複素数の行列要素持つものがある. この表現をユニタリー行列

$$
U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{3.53}
$$

で同値変換 $D^E(g) = U^{-1}D(g)U$ を行うと, 行列要素がすべて実数となる表現 (**実表現**という) が得られ, 表現行列は表 3.2 の最下段のようになる. マリケンの記号ではこの表現を E 表現という. 以上を表 3.2 にまとめた.[7] $\boldsymbol{D}_4$ の類の数は $n_C = 5$ であり, 既約表現の数 n_r も一次元表現 A_1, A_2, B_1, B_2

$\boldsymbol{D}_4$	E	C_{4z}^{+}	C_{2z}	C_{4z}^{-}
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	1
B_1	1	−1	1	−1
B_2	1	−1	1	−1
E	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{D}_4$	C_{2x}	C_{2y}	C_{2a}	C_{2b}
A_1	1	1	1	1
A_2	−1	−1	−1	−1
B_1	1	1	−1	−1
B_2	−1	−1	1	1
E	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

表 3.2: $\boldsymbol{D}_4$ の既約表現行列.

の 4 個と 2 次元表現である E の一個の計 5 個で, $\boldsymbol{D}_4$ のすべての表現を尽くしていることが分かる. またこれらの既約表現は表現次数の関係を与える定理 3.6 の関係

$$
d_{A_1}^2 + d_{A_2}^2 + d_{B_1}^2 + d_{B_2}^2 + d_E^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 8 = |\boldsymbol{D}_4| \tag{3.54}
$$

[7] 以後この解説で扱う既約表現は全て実表現である.

を満たす．固体物性論に登場する点群（結晶の回転対称性を表す）の多くは $G=H+lH$ の構造をしており，$\boldsymbol{D}_4$ の場合のように，定理3.7を使って H の既約表現から G の既約表現を求めることが出来る．

3.4　射影演算子

$x\in\mathbf{R}$ の関数 $f(x)=f^e(x)+f^o(x)$ を考える．ここで $f^e(x)$ は x の偶関数，$f^o(x)$ は x の奇関数とする．任意の x の関数 $f(x)$ から偶関数または奇関数の成分を取り出す操作は

$$\begin{aligned} f^e(x) &= \tfrac{1}{2}\{(1)E\cdot f(x)+(1)I\cdot f(x)\} \\ f^0(x) &= \tfrac{1}{2}\{(1)E\cdot f(x)+(-1)I\cdot f(x)\} \end{aligned} \tag{3.55}$$

で与えられる．ここで I は空間反転で，その関数 $f(x)$ への作用は $I\cdot f(x)=f(-x)$ で与えられる．このように特定の性質(対称性)を持つ関数またはベクトルを取り出す方法が一般化できれば望ましい．それを行うのがこれから述べる射影演算子である．

既約表現 γ の表現行列を $D^{(\gamma)}(g)$ とするとき，射影演算子を

$$P^{(\gamma)}_{lm} = \frac{d_\gamma}{|G|}\sum_{g\in G}D^{(\gamma)}_{lm}(g)^* g \tag{3.56}$$

で定義する．射影演算子を使うと，G が作用する任意のベクトル空間 V^n_R から特定の既約表現 (γ とする) に属する部分空間 V^γ_R を取り出すことが出来る．ある $v\in V_R$ に対して $P^{(\gamma)}_{lm}\cdot v\neq 0$ ならば $(P^{(\gamma)}_{1m}\cdot v, P^{(\gamma)}_{2m}\cdot v,\cdots,P^{(\gamma)}_{d_\gamma m}\cdot v)$ は表現 $D^{(\gamma)}$ の表現空間の基底になっている．ここで下付添え字の m は任意でよい．なぜならば

$$\begin{aligned} g_a\cdot P^{(\gamma)}_{lm}\cdot v &= \frac{d_\gamma}{|G|}\sum_{g\in G}D^{(\gamma)}_{lm}(g)^*(g_a g)\cdot v \\ &= \frac{d_\gamma}{|G|}\sum_{g'\in G}D^{(\gamma)}_{lm}(g_a^{-1}g')^*(g')\cdot v \\ &= \frac{d_\gamma}{|G|}\sum_{g'\in G}\sum_{l'}D^{(\gamma)}_{ll'}(g_a^{-1})^* D^{(\gamma)}_{l'm}(g')^* g'\cdot v \\ &= \sum_{l'}D^{(\gamma)}_{l'l}(g_a)\frac{d_\gamma}{|G|}\sum_{g'\in G}D^{(\gamma)}_{l'm}(g')^* g'\cdot v \\ &= \sum_{l'}D^{(\gamma)}_{l'l}(g_a)P^{(\gamma)}_{l'm}\cdot v \end{aligned} \tag{3.57}$$

となるからである．ここで $g_a g=g'$ とおき，$D^{(\gamma)}(g)$ のユニタリー性 $D^{(\gamma)}(g^{-1})^*=D^{(\gamma)}(g)^t$ を使った．γ が一次元表現の場合 $P^{(\gamma)}_{lm}$ の下の添え字を省略して $P^{(\gamma)}$ と書くことにする．群 G の**恒等表現への射影演算**を $P^{(0)}(G)$ と記す．これは

$$G^{(0)}(G) = \frac{1}{|G|}\{g_1+g_2+\cdots+g_{|G|}\} \tag{3.58}$$

で定義され，G 不変なベクトルを見出すためによく使用される．

例 3.5　3次元空間 V^3_R の $\boldsymbol{D}_4$ による既約分解
射影演算子の方法を3次元ユークリッド空間 $V^3_R=\{e_1,e_2,e_3\}_R$ へ適応してみよう．

(A_1) この場合射影演算子は $P^{(0)}$ と記され, e_1 に作用させると

$$\begin{aligned} P^{(0)}\cdot e_1 &= \frac{1}{8}\{e_1+C_{4z}\cdot e_1+C_{2z}\cdot e_1+C_{4z}^-\cdot e_1 \\ &\quad +C_{2x}\cdot e_1+C_{2y}\cdot e_1+C_{2a}\cdot e_1+C_{2b}\cdot e_1\} \\ &= \frac{1}{8}\{e_1+e_2+(-e_1)+(-e_2)+e_1+(-e_1)+e_2+(-e_2)\}=0 \end{aligned} \tag{3.59}$$

同様に

$$\begin{aligned} P^{(0)}\cdot e_2 &= 0 \\ P^{(0)}\cdot e_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.60}$$

を得る. したがって V_R^3 には A_1 に属する部分空間は存在しない.

(A_2) 表 3.2 を利用して e_3 に対して

$$\begin{aligned} P^{(A_2)}\cdot e_3 &= \tfrac{1}{8}\{e_3+C_{4z}^+\cdot e_3+C_{2z}\cdot e_3+C_{4z}^-\cdot e_3 \\ &\quad +(-1)C_{2x}\cdot e_3+(-1)C_{2y}\cdot e_3+(-1)C_{2a}\cdot e_3+(-1)C_{2b}\cdot e_3\} \\ &= \tfrac{1}{8}\{e_3+e_3+e_3+e_3 \\ &\quad +(-1)(-e_3)+(-1)(-e_3)+(-1)(-e_3)+(-1)(-e_3)\} \\ &= e_3 \end{aligned} \tag{3.61}$$

を得る. また

$$\begin{aligned} P^{(A_2)}\cdot e_1 &= 0 \\ P^{(A_2)}\cdot e_2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.62}$$

である. このようにして e_3 は A_2 表現の基底になっていることが分かる.

(B_1) 表 3.2 を利用して e_1, e_2, e_3 に対して $P^{(B_1)}$ を作用させると

$$\begin{aligned} P^{(B_1)}\cdot e_1 &= 0 \\ P^{(B_1)}\cdot e_2 &= 0 \\ P^{(B_1)}\cdot e_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.63}$$

を得る.

(B_2) 表 3.2 を利用して e_1, e_2, e_3 に対して $P^{(B_2)}$ を作用させると

$$\begin{aligned} P^{(B_1)}\cdot e_1 &= 0 \\ P^{(B_1)}\cdot e_2 &= 0 \\ P^{(B_1)}\cdot e_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.64}$$

を得る.

(E) 表 3.2 を利用して e_1 に対して $P_{11}^{(E)}, P_{21}^{(E)}$ を作用させると

$$\begin{aligned} P_{11}^{(E)}\cdot e_1 &= \tfrac{2}{8}\{(1)e_1+(-1)C_{2z}\cdot e_1+(1)C_{2x}\cdot e_1+(-1)C_{2y}\cdot e_1\} \\ &= \tfrac{1}{4}\{(1)e_1+(-1)(-e_1)+(1)(e_1)+(-1)(-e_1)\} \\ &= e_1 \\ P_{21}^{(E)}\cdot e_1 &= \tfrac{2}{8}\{(1)C_{4z}^+\cdot e_1+(-1)C_{4z}^-\cdot e_1+(1)C_{2a}\cdot e_1+(-1)C_{2b}\cdot e_1\} \\ &= \tfrac{1}{4}\{(1)e_2+(-1)(-e_2)+(1)(e_2)+(-1)(-e_2)\} \\ &= e_2 \end{aligned} \tag{3.65}$$

を得る．また $\boldsymbol{e}_2$ に対して $P^{(E)}_{11}, P^{(E)}_{21}$ を作用させると

$$
\begin{aligned}
P^{(E)}_{11}\cdot\boldsymbol{e}_2 &= \tfrac{2}{8}\{(1)\boldsymbol{e}_2+(-1)C_{2z}\cdot\boldsymbol{e}_2+(1)C_{2x}\cdot\boldsymbol{e}_2+(-1)C_{2y}\cdot\boldsymbol{e}_2\}\\
&= \tfrac{1}{4}\{(1)\boldsymbol{e}_2+(-1)(-\boldsymbol{e}_2)+(1)(-\boldsymbol{e}_2)+(-1)(\boldsymbol{e}_1)\}\\
&= 0\\
P^{(E)}_{21}\cdot\boldsymbol{e}_2 &= \tfrac{2}{8}\{(1)C^{+}_{4z}\cdot\boldsymbol{e}_2+(-1)C^{-}_{4z}\cdot\boldsymbol{e}_2+(1)C_{2a}\cdot\boldsymbol{e}_2+(-1)C_{2b}\cdot\boldsymbol{e}_2\}\\
&= \tfrac{1}{4}\{(1)(-\boldsymbol{e}_1)+(-1)(\boldsymbol{e}_1)+(1)(\boldsymbol{e}_1)+(-1)(-\boldsymbol{e}_1)\}\\
&= 0
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

となる．また同様にして

$$
\begin{aligned}
P^{(E)}_{11}\cdot\boldsymbol{e}_3 &= 0\\
P^{(E)}_{21}\cdot\boldsymbol{e}_3 &= 0
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

を得る．したがって $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ は E 表現の基底である．

こうして V^3_R は次の様に既約分解される．

$$
\begin{aligned}
V^3_R &= V^{A_2}_R\oplus V^E_R\\
V^{A_2}_R &= \{\boldsymbol{e}_3\}_R\\
V^E_R &= \{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}_R
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

∎

このように既約表現の表が分かれば，ベクトル V_R を射影演算子を使って既約分解：

$$
V_R = V^{(1)}_R\oplus V^{(2)}_R\oplus\cdots\oplus V^{(\gamma)}_R\oplus\cdots, \tag{3.69}
$$

を得ることが出来る．

第4章　群に不変な関数の変分問題の解の分岐理論

第4章では群論的分岐理論[1, 4, 5]を物性研究者にも馴染み易い形で紹介する. それでも物性研究者には馴染みにくい数学的な諸概念が現われので, これらの概念の意味を把握できるように, 簡単な Ginzburg-Landau の自由エネルギーの例を基にして説明する. n 個の実数 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in V_R^n$ を変数として, 外部パラメーター λ を含む関数 $F(\boldsymbol{x}, \lambda)$ がある群 G_0 の作用に対してに不変, すなわち

$$F(g\boldsymbol{x}, \lambda) = F(\boldsymbol{x}, \lambda),\ g \in G_0$$

であるとき, この関数 $F(\boldsymbol{x}, \lambda)$ の極値問題に即して, 群論的分岐理論を考察する.

関数 $F(\boldsymbol{x}, \lambda)$ が群 G_0 に不変であることが, 極値問題を解く上でどのような役割を果たすか？を解明する. そこで $F(\boldsymbol{x}, \lambda)$ の極値を与える解 $\boldsymbol{x}_a$ の固定部分群 $G(\boldsymbol{x}_a) = \{g \in G_0 | g \cdot \boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{x}_a\}$ を求めることが課題になる. これは V_R^n よりはるかに次元の小さい部分空間 V_R^γ ={G_0 の既約表現の表現空間} での解析によって決定できることが示される (Sattinger の定理). G_j を G_0 の部分群としたとき, V_R^γ での G_j の 固定点部分空間:

$$\mathrm{Fix}(G_j) \quad = \quad \{v \in V_R^\gamma \mid\ g \cdot v = v \text{ for all } g \in G_j\}$$

が定義される. $\mathrm{Fix}(G_j)$ の次元が1次元のとき, 必ずその方向に極値問題の解の枝 (branch) があることが示される (共変分岐定理). $\boldsymbol{D}_4$ に不変な関数の極値問題を例として, 共変分岐定理の有効性を示す. もっと一般的な非線形方程式の解の分岐の数学的議論については Golubitsky 等の教科書[4, 5]を見られたい.

4.1　ベクトル空間

n 次元実ベクトル空間 $V_R^n = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}_R$ を考える. ここで $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ は基底ベクトルであり, 任意のベクト v は実数の組 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で

$$v \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j \tag{4.1}$$

と表される. $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を基底 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ に対する v の成分または座標と呼び, 次の縦ベクトル $\boldsymbol{x}$ で表す.

$$\boldsymbol{x} \quad = \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$\boldsymbol{x}$ を使うと v は次式で表される.

$$v = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{x} \tag{4.3}$$

n 次元複素ベクトル空間 $V_C^n = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}_C$ は任意のベクトル $v \in V_C^n$ が

$$v = \sum_{j=1}^{n} z_j \boldsymbol{e}_j \tag{4.4}$$

と複素数の縦ベクトル

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

で表されるものである. n 次元複素ベクトル空間 $V_C^n = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ は $z_j = x_j + iy_j$ (x_j, y_jは実数) と書くと任意のベクトル $v \in V_C^n$ は

$$v = \sum_{j=1}^{n} \{x_j \boldsymbol{e}_j + y_j(i\boldsymbol{e}_j)\} \tag{4.6}$$

と書かれ, V_C^n は $2n$ 次元の実ベクトル空間とみなす事が出来る. すなわち

$$\begin{aligned} V_C^n &= \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}_C \\ &\equiv V_R^{2n} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n, i\boldsymbol{e}_1, i\boldsymbol{e}_2, \cdots, i\boldsymbol{e}_n\}_R \end{aligned} \tag{4.7}$$

と V_C^n と V_R^{2n} を 同一視する. 以下実ベクトル空間 V_R^n を取り扱うことにする.

V_R^n の基底 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ に対する群 G の作用を (3.6) のように

$$\begin{aligned} g \cdot (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) &= (g \cdot \boldsymbol{e}_1, g \cdot \boldsymbol{e}_2, \cdots, g \cdot \boldsymbol{e}_n) \\ &= (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \begin{pmatrix} D_{11}(g) & D_{12}(g) & \cdots & D_{1n}(g) \\ D_{21}(g) & D_{22}(g) & \cdots & D_{2n}(g) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1}(g) & D_{n2}(g) & \cdots & D_{nn}(g) \end{pmatrix} \\ &= (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) D(g) \end{aligned} \tag{4.8}$$

とする. 一方 $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i$ に対する $g \in G$ の作用は

$$\begin{aligned} g \cdot v &= \sum_{i=1}^{n} x_i (g \cdot \boldsymbol{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} D_{ji}(g) \boldsymbol{e}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \{\sum_{i=1}^{n} D_{ji}(g) x_i\} \boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \boldsymbol{e}_j \end{aligned} \tag{4.9}$$

ここで

$$x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11}(g) & D_{12}(g) & \cdots & D_{1n}(g) \\ D_{21}(g) & D_{22}g) & \cdots & D_{2n}(g) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1}(g) & D_{n2}(g) & \cdots & D_{nn}(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = D(g)x \tag{4.10}$$

基底 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ に対する g の作用 (3.6) と座標 x に対する g の作用 (4.10) の相違に注意されたい. これは x に対する G の作用は

$$x' = g \cdot x = D(g)x \tag{4.11}$$

となることを示す.

以後 $x_1, x_2 \in V_R^n$ には内積

$$(x, x') = \sum_{i=1^n} x_i x_i' = x^t x' \tag{4.12}$$

が定義され, 群の作用は内積を保存するものとする:

$$(g \cdot x_1, g \cdot x_2) = (x_1, x_2) \tag{4.13}$$

これより

$$\sum_{i=1}^{n} D_{ij}(g) x_j \sum_{l=1}^{n} D_{il}(g) x_l' = \sum_{j,l=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} D_{ji}(g)^t D_{il}(g)) x_j x_l' = \sum_{j=1}^{n} x_j x_j' \tag{4.14}$$

を得る. したがって

$$D^t(g) D(g) = \mathbf{1}_n \tag{4.15}$$

すなわち, D は直交行列となる.

4.2 群不変な関数

実ベクトル空間 $V_R^n = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}_R$ 上の実数値関数 $F(v, \lambda)$ を考える. ここで $v = \sum_i x_i e_i$ で, 実数 λ は外部パラメーターである. $F(v, \lambda)$ は $F(x, \lambda)$ または $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda)$ とも書くことにする. ここで

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

である.

$F(x, \lambda)$ は G_0 不変な関数, すなわち,

$$F(g \cdot x, \lambda) = F(x, \lambda) \quad \text{for all } g \in G_0 \tag{4.17}$$

とする. G_0 不変な関数 $F(\boldsymbol{x},\lambda)=F(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)$ の極値を与える条件は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}\Phi_1(\boldsymbol{x},\lambda) &\equiv \frac{\partial F(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial x_1}=0\\ \Phi_2(\boldsymbol{x},\lambda) &\equiv \frac{\partial F(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial x_2}=0\\ &\vdots \\ \Phi_n(\boldsymbol{x},\lambda) &\equiv \frac{\partial F(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial x_n}=0\end{aligned} \tag{4.18}$$

これをまとめて

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\lambda) \equiv \begin{pmatrix}\Phi_1(\boldsymbol{x},\lambda)\\ \Phi_2(\boldsymbol{x},\lambda)\\ \vdots \\ \Phi_n(\boldsymbol{x},\lambda)\end{pmatrix}=0 \tag{4.19}$$

と記す.

$F(\boldsymbol{x},\lambda)=F(g\cdot\boldsymbol{x},\lambda)$ を成分をあらわに書くと

$$F(x_1,\cdots,x_n,\lambda) = F(g\cdot\boldsymbol{x},\lambda)=F(\sum_i D_{1i}(g)x_i,\cdots\sum_i D_{ni}(g)x_i,\lambda) \tag{4.20}$$

両辺を x_i で偏微分すると

$$\begin{aligned}\Phi_i(x_1,\cdots,x_n,\lambda) &= \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,\cdots,x_n,\lambda)\\ &= \frac{\partial F}{\partial x_1}(g\cdot\boldsymbol{x},\lambda)D_{1i}(g)+\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_n}(g\cdot\boldsymbol{x},\lambda)D_{ni}(g),\\ &= \sum_j \Phi_j(g\cdot\boldsymbol{x},\lambda)D_{ji}\\ &= \sum_j D^t_{ij}(g)\Phi_j(g\cdot\boldsymbol{x},\lambda)=\sum_j D^{-1}_{ij}(g)\Phi_j(g\cdot\boldsymbol{x},\lambda)\end{aligned} \tag{4.21}$$

すなわち,

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\lambda) = D^{-1}\boldsymbol{\Phi}(g\cdot\boldsymbol{x}) \tag{4.22}$$

を得る. ここで D が直交行列であること $D^{-1}=D^t$ を使った. したがって

$$\boldsymbol{\Phi}(g\cdot\boldsymbol{x},\lambda) = D(g)\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\lambda) \tag{4.23}$$

を得る. (4.23) の関係を $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\lambda)$ は G_0-同変 (G_0-equivariant) または G_0-共変 (G_0-covariant) であるという.

これより $\boldsymbol{x}_a$ で $F(\boldsymbol{x},\lambda)$ が極値ならば, すなわち $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_a,\lambda)=0$ ならば

$$\boldsymbol{\Phi}(g\cdot\boldsymbol{x}_a,\lambda) = D(g)\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_a,\lambda)=D(g)0=0 \tag{4.24}$$

となって $g\cdot\boldsymbol{x}_a$ でも F が極値になることが分かる.

極値を与える $\boldsymbol{x}_a$ の不変部分群 $G(\boldsymbol{x}_a) \subset G_0$ は次の式で定義される:

$$G(\boldsymbol{x}_a) \;=\; \{g \in G_0 \mid g \cdot \boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{x}_a\} \tag{4.25}$$

「どのような場合に分岐が生じるか?」「G_0 の部分群の中で,どのような部分群が F の極値を与える解 $\boldsymbol{x}_a$ の不変部分群になりえるか?」,「不変部分群の構造を知ることが出来れば極値問題の解法が簡単になるか?」がこれからの問題になる.まず $\boldsymbol{\Phi}(x, \lambda) = 0$ の解の分岐の可能性を論ずる上で基礎になる陰関数の定理を述べる.

4.3 ヤコビ行列と陰関数の定理

$F(\boldsymbol{x}, \lambda)$ の極値問題

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, \lambda) \;=\; 0$$

において $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_a, \lambda_a) = 0$ と仮定する.以後記述を簡単にするため, $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_a)$, $(\lambda - \lambda_a)$ を改めて $\boldsymbol{x}$, λ と書くことにする.その場合

$$\boldsymbol{\Phi}(0,0) \;=\; 0 \tag{4.26}$$

となる. $d\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, \lambda)$ を $n \times n$ のヤコビ行列とする:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, \lambda) \;&\equiv\; \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}, \lambda) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}, \lambda) & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}, \lambda) \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}, \lambda) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}, \lambda) & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}, \lambda) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}, \lambda) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}, \lambda) & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}, \lambda) \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_1}(\boldsymbol{x}, \lambda) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}, \lambda) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n}(\boldsymbol{x}, \lambda) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(\boldsymbol{x}, \lambda) & \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_2}(\boldsymbol{x}, \lambda) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n}(\boldsymbol{x}, \lambda) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1}(\boldsymbol{x}, \lambda) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2}(\boldsymbol{x}, \lambda) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_n}(\boldsymbol{x}, \lambda) \end{pmatrix} \equiv d^2 F(\boldsymbol{x}, \lambda) \end{aligned} \tag{4.27}$$

後者の表式は F のヘシアン (Hessian) 行列と呼ばれている.以下 $\boldsymbol{\Phi}(0,0) = 0$ とし,

$$L \;=\; d\boldsymbol{\Phi}(0,0) = d^2 F(0,0) \tag{4.28}$$

と書く. L は実対称 $n \times n$ 行列である. L は (4.26) を考慮すると, $F(\boldsymbol{x}, 0)$ のテイラー展開の2次の係数である:

$$F(\boldsymbol{x}, 0) \;=\; \frac{1}{2} \sum_{ij} L_{ij} x_i x_j + F^3(\boldsymbol{x}, 0) \tag{4.29}$$

ここで $F^3(\boldsymbol{x}, 0)$ はテイラー展開の3次以降の項である.方程式 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, \lambda) = 0$ の解 $\boldsymbol{x}(\lambda)$ を考察する上で,次の陰関数の定理 [6, 7] は重要な役割を果たす.

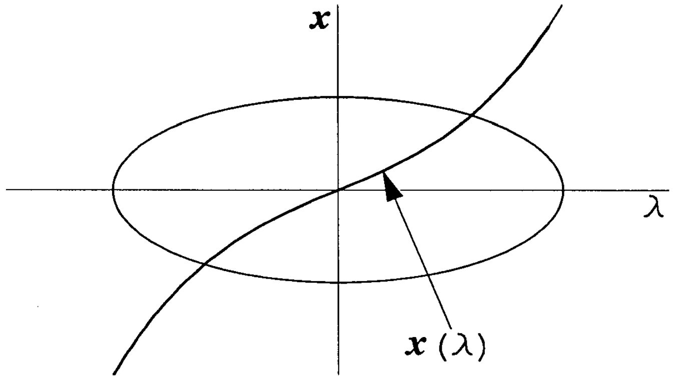

図 4.1: $\det(L) \neq 0$ のとき, $\lambda = 0$ の近傍での $F(\boldsymbol{x}, \lambda) = 0$ の一意的な解 $\boldsymbol{x}(\lambda)$

定理 4.1 (陰関数の定理) $n+p$ 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+p}$ の間の n 個の関係式

$$\Phi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+p}) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.30}$$

が点 $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, x_{n+1}^0, \cdots, x_{n+p}^0)$ で満たされ, Φ_i は点 P_0 の近傍で連続的微分可能とする. また, 関数行列式が点 P_0 において

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}, & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}, & \cdots, & \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_n}, & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_n}, & \cdots, & \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \neq 0, \tag{4.31}$$

とする. そのとき点 $(x_{n+1}^0, \cdots, x_{n+p}^0)$ の近傍で p 個の変数 $(x_{n+1}, \cdots, x_{n+p})$ の n 個の関数

$$x_i = g_i(x_{n+1}, \cdots, x_{n+p}) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.32}$$

が一意的に定まり,

1) $\Phi_i(g_1, g_2, \cdots, g_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+p}) = 0,$

2) $x_i^0 = g_i(x_{n+1}^0, \cdots, x_{n+p}^0)$

が成り立つ.

この定理の証明は標準的な解析学の教科書[6, 7]に載っているのでそれらを見られたい. 一意的ということろが分岐を考えるとき重要になる.

まず L のランクが n すなわち $\det(L) \neq 0$ の場合を考える. 陰関数の定理を $p = 1$ の場合に $x_{n+p} = x_{n+1} = \lambda$ として適用すると, $(\boldsymbol{x}, \lambda) = (0, 0)$ の近傍で $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}(\lambda), \lambda) = 0$ なる λ の関数 $\boldsymbol{x}(\lambda)$

が一意的に定まる. したがって, $\lambda=0$ の近傍では図 4.1 のように分岐 (bifurcation) は起こらない. このような点 $(\boldsymbol{x},\lambda)=(0,0)$ を通常点 (ordinary point) という.

したがって $\lambda=0$ の近傍で分岐が生じるためには $\det(L)=0$ が必要条件である. $\det(L)=0$ が成り立つとき, 点 $(\boldsymbol{x},\lambda)=(0,0)$ を特異点という. $\det(L)=0$ が成り立つとき, $(\boldsymbol{x},\lambda)=(0,0)$ の近傍での解の様子は, 次のリャプーノフ-シュミット (Liapunov-Schmidt) の方法を用いて調べられる.

4.4 リャプーノフ-シュミット (Liapunov-Schmidt) の方法

次に $\det(L)=0$ で $n\times n$ 行列 L の $\mathrm{rank}(L)=(n-m)<n$ の場合を考える. ここで $\mathrm{rank}(L)$ は L のランクを表す. V_R^n の部分ベクトル空間 $\ker L$ (L の核) と range L (L の値域) を次のように定義する.[1, 4)]

$$
\begin{aligned}
\ker L &\equiv \{\boldsymbol{x}\in V_R^n \mid L\boldsymbol{x}=0\} \\
\mathrm{range}\ L &\equiv \{\boldsymbol{x}\in V_R^n \mid \boldsymbol{x}=L\boldsymbol{y},\ \forall\boldsymbol{y}\in V_R^n\}
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

rank $(L)=n-m$ であるので $\ker L$ の次元は m 次元で, range L の次元は $n-m$ 次元である. 次の様に V_R^n を直和分解することが出来る.

$$
\begin{aligned}
V_R^n &= \ker L+M \\
V_R^n &= \mathrm{range}\ L+N
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

range L への射影演算子を P とし, $(E-P)$ を N への射影演算子とする. ここで E は V_R^n における恒等演算子である. すなわち

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2 \\
\boldsymbol{x}_1 &\in \mathrm{range}\ L \\
\boldsymbol{x}_2 &\in N
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

の場合

$$
\begin{aligned}
P\cdot\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1 \\
(E-P)\cdot\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_2
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

(4.33) より, L の固有値ゼロに対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{l}_1^0,\boldsymbol{l}_2^0,\cdots,\boldsymbol{l}_m^0$, ゼロでない固有値に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2,\cdots,\boldsymbol{l}_{n-m}$ とすると

$$
\begin{aligned}
\ker L &= \{\boldsymbol{l}_1^0,\boldsymbol{l}_2^0,\cdots,\boldsymbol{l}_m^0\}_R \\
M &= \{\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2,\cdots,\boldsymbol{l}_{n-m}\}_R, \\
\mathrm{range}\ L &= \{\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2,\cdots,\boldsymbol{l}_{n-m}\}_R \\
N &= \{\boldsymbol{l}_1^0,\boldsymbol{l}_2^0,\cdots,\boldsymbol{l}_m^0\}_R
\end{aligned}
$$

と書くことが出来る. $L,M,N,P,(E-P)$ のイメージを把握するために, 次の例を考えよう.

例 4.1 次の自由エネルギー関数 F を考える.

$$
\begin{aligned}
F(x_1,x_2,x_3,\lambda) &= \alpha_1\lambda(x_1^2+x_2^2)+\alpha_3(\lambda-t_3)x_3^2 \\
&\quad +\beta_1x_1^2x_2^2+\beta_2(x_1^4+x_2^4)+\beta_3x_3^4+\gamma_1(x_1^2+x_2^2)x_3^2.
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

ここで t_3 は定数, $\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1$ は正の定数とみなす. $F(x_1, x_2, x_3, \lambda)$ の極値問題の方程式は次の様に書ける:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\boldsymbol{x}, \lambda) &= \frac{\partial F}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}, \lambda) = 2\alpha_1 \lambda x_1 + 2\beta_1 x_1 x_2^2 + 4\beta_2 x_1^3 + 2\gamma_1 x_1 x_3^2 = 0 \\
\Phi_2(\boldsymbol{x}, \lambda) &= \frac{\partial F}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}, \lambda) = 2\alpha_1 \lambda x_2 + 2\beta_1 x_1^2 x_2 + 4\beta_2 x_2^3 + 2\gamma_1 x_2 x_3^2 = 0 \\
\Phi_3(\boldsymbol{x}, \lambda) &= \frac{\partial F}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, \lambda) = 2\alpha_3 (\lambda - t_3) x_3 + 4\beta_3 x_3^3 + 2\gamma_1 (x_1^2 + x_2^2) x_3 = 0
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$\lambda = 0$ で $\boldsymbol{x} = 0$ が (4.38) の解であること, すなわち $\boldsymbol{\Phi}(0, 0) = 0$ は, すぐ確かめられる. $(\boldsymbol{x}, \lambda) = (0, 0)$ における F のヘシアン L はつぎのように書ける.

$$\begin{aligned}
L = d\boldsymbol{\Phi}(0,0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}_{(0,0)} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha_3 t_3 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

となる. したがって $\det(L) = 0$ となり, 分岐が起きる可能性がある. $t_3 \neq 0$ の場合は ker L, range L, M, N は

$$\begin{aligned}
\ker L &= \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}_R \\
\text{range } L &= \{\boldsymbol{e}_3\}_R \\
M &= \{\boldsymbol{e}_3\}_R \\
N &= \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}_R
\end{aligned} \tag{4.40}$$

となる. したがって range L への射影演算子 P と $E - P$ は

$$\begin{aligned}
P &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
E - P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

である. ▮

任意の $\boldsymbol{u} \in V_R^n$ に対して, $\boldsymbol{u} = 0$ は $P\boldsymbol{u} = 0$ かつ $(E - P)\boldsymbol{u} = 0$ と同等である. したがって $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, \lambda) = 0$ は次の様に書かれる.

$$\begin{aligned}
&& \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, \lambda) &= 0 \\
&& &\Updownarrow \\
\text{(a)} && P\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, \lambda) &= 0, \\
\text{(b)} && (E - P)\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, \lambda) &= 0
\end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{x} \in V_R^n$ を次の様に分解する.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \tag{4.43}$$

ここで $\boldsymbol{y} \in \ker L$ で $\boldsymbol{z} \in M$ である. (4.42) の (a) より

$$P\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z},\lambda) = 0 \tag{4.44}$$

を得る. 写像 $\boldsymbol{\Psi}$: $M \times \ker\ L \times R \longrightarrow \text{range}\ L$ を次の様に定義する.

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y},\lambda) \equiv P\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z},\lambda) \tag{4.45}$$

これを $(\boldsymbol{y},\lambda)$ をパラメターとする $\boldsymbol{z}$ の関数とみなすと, $\boldsymbol{\Psi}$ の $\boldsymbol{z}$ に関するヤコビアンはゼロでないので, 陰関数の定理により

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{y},\lambda),\boldsymbol{y},\lambda) = 0 \tag{4.46}$$

を満たす $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{y},\lambda)$ が $(\boldsymbol{y},\lambda)=(0,0)$ の近傍で一意的に定まる. $\boldsymbol{\Phi}(0,0)=0$ であり, $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{y},\lambda)$ は一意的であるので

$$\boldsymbol{z}(0,0) = 0, \tag{4.47}$$

を満たす. $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{y},\lambda)$ を (4.42) の (b) に代入すると $\ker L$ 上の関数の方程式

$$\phi(\boldsymbol{y},\lambda) \equiv (E-P)\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}(\boldsymbol{y},\lambda),\lambda)=0 \tag{4.48}$$

を得る. したがって n 次元変数の方程式 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\lambda)=0$ の解と $m(<n)$ 次元変数の方程式 (4.46) の解とは一対一に対応する. このように n 変数から m 変数の方程式に変換することを **Liapunov-Schmidt 縮約** (Liapunov-Schmidt reduction) という. $\phi(\boldsymbol{y},\lambda)=0$ を**分岐方程式** (bifurcation equation) と呼ぶ.

例 4.2 例 4.1 の $t_3 \neq 0$ の場合

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{y} &= y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 \in \ker\ L \\ \boldsymbol{z} &= z\boldsymbol{e}_3\ \in M \end{aligned} \tag{4.49}$$

となり,

$$\Psi(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y},\lambda) = P\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z},\lambda) = 2\alpha_3(\lambda-t_3)z + 4\beta_3 z^3 + 2\gamma_1(x_1^2+x_2^2)z = 0 \tag{4.50}$$

は $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y},\lambda)=(0,0,0)$ の近傍で

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z}(0,0,0) = 2\alpha_3(-t_3) \neq 0 \tag{4.51}$$

であるので, 陰関数の定理により *(4.50)* から z は x_1,x_2,λ の関数 $z(x_1,x_2,\lambda)$ として一意的に表される. ∎

4.5 Sattinger の定理

(4.48) は一般的な n 変数の関数 $F(\boldsymbol{x},t)$ に対して成り立つが, $F(\boldsymbol{x},t)$ が群 G_0 に不変な関数の場合, 分岐方程式はどのような群論的性質をもつであろうか? それに答えるのが次に述べる Sattinger の定理[1)] である.

$$F(g\cdot\boldsymbol{x},\lambda) \;=\; F(\boldsymbol{x},\lambda) \quad \text{for all} \;\; g\in G_0 \tag{4.52}$$

の場合 (4.23) により

$$\boldsymbol{\Phi}(g\cdot\boldsymbol{x},\lambda) \;=\; D(g)\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\lambda) \tag{4.53}$$

が成り立つ. その場合, 次の定理が成り立つ.

定理 4.2 (Sattinger の定理) すべての $g\in G_0$ に対して次の命題が成り立つ.
(a)

$$D(g)L \;=\; LD(g) \tag{4.54}$$

(b) ker L, range L , M,N は G_0 不変な部分空間である. すなわち

$$\begin{array}{rcl} g\cdot\boldsymbol{y} & \in & \ker L \;\; \text{for all}\; \boldsymbol{y}\in \;\; \ker L \\ g\cdot\boldsymbol{y} & \in & \text{range}\; L \;\text{for all}\; \boldsymbol{y}\in \;\; \text{range}\; L \\ g\cdot\boldsymbol{y} & \in & M \;\; \text{for all}\; \boldsymbol{y}\in M \\ g\cdot\boldsymbol{y} & \in & N \;\; \text{for all}\; \boldsymbol{y}\in N \end{array} \tag{4.55}$$

(c)

$$\begin{array}{rcl} PD(g) & = & D(g)P \\ (E-P)D(g) & = & D(g)(E-P) \end{array} \tag{4.56}$$

(d)

$$\phi(g\cdot\boldsymbol{y},\lambda) \;=\; D(g)\phi(\boldsymbol{y},\lambda) \tag{4.57}$$

証明
(a) Φ の共変性 (4.23) より

$$\Phi_i(\sum_j D_{1j}(g)x_j, \sum_j D_{2j}(g)x_j, \cdots, \sum_j D_{nj}(g)x_j, \lambda) \;=\; \sum_j D_{ij}(g)\Phi_j(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda) \tag{4.58}$$

を得る. これを x_l で偏微分すると

$$\sum_k \frac{\partial\Phi_i}{\partial x_k}(g\cdot\boldsymbol{x},\lambda)D_{kl}(g) \;=\; \sum_j D_{ij}(g)\frac{\partial\Phi_j}{\partial x_l}(\boldsymbol{x},\lambda) \tag{4.59}$$

を得る. $(\boldsymbol{x},\lambda)=(0,0)$ と置くと,

$$\sum_k L_{ik}D_{kl}(g) \;=\; \sum_j D_{ij}(g)L_{jl} \tag{4.60}$$

すなわち

$$LD(g) \;=\; D(g)L \tag{4.61}$$

を得る.

(b) $\boldsymbol{y}\in\ker L$ とすると $L\boldsymbol{y}=0$. したがって (4.54) より $LD(g)\boldsymbol{y}=D(g)L\boldsymbol{y}=D(g)0=0$. 故に $D(g)\boldsymbol{y}$ は $\ker L$ に属する. すなわち $\ker L$ は G_0 不変である. $\boldsymbol{x}\in\mathrm{range}\ L$ とすると, あるベクトル $\boldsymbol{w}\in V_R^n$ が存在して $\boldsymbol{x}=L\boldsymbol{w}$ となる. したがって $D(g)\boldsymbol{x}=D(g)L\boldsymbol{w}=LD(g)\boldsymbol{w}$. 故に $D(g)\boldsymbol{x}$ は range L に属する. すなわち range L は G_0 不変である. $\boldsymbol{w}\in M$ とすると $\boldsymbol{w}\in(\ker L)^\perp$. ここで $(\ker L)^\perp$ は $(\ker L)$ の直交補空間を表す. 故に

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \;=\; 0 \;\text{ for all } \boldsymbol{v}\in\ker L \tag{4.62}$$

ここで $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ は内積を表す. したがって

$$(\boldsymbol{v},D(g)\boldsymbol{w}) \;=\; (D(g)^{-1}\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=0 \tag{4.63}$$

を得る. ここで始めの等号は内積の G_0 不変性 (4.13) を使い, 第二の等号は $D(g)^{-1}\boldsymbol{v}\in\ker L$ であることを使った. したがって $D(g)\boldsymbol{w}\in(\ker L)^\perp$. すなわち $D(g)\boldsymbol{w}$ は $(\ker L)^\perp=M$ に属する. したがって M は G_0 不変である. N の G_0 不変性も同様に証明できる.

(c) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in V_R^n$ を取り $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ とする. ここで $\boldsymbol{v}\in\mathrm{range}\ L$ であり, $\boldsymbol{w}\in N$ である. そのとき

$$D(g)P\boldsymbol{x} \;=\; D(g)\boldsymbol{v}=P(D(g)\boldsymbol{v})=P(D(g)\boldsymbol{v}+D(g)\boldsymbol{w})=PD(g)\boldsymbol{x} \tag{4.64}$$

したがって

$$D(g)P \;=\; PD(g), \tag{4.65}$$

が成り立つ. 同様に $D(g)(E-P)=(E-P)D(g)$ が成り立つ.

(d) (4.46) より

$$P\Phi(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}(\boldsymbol{y},\lambda),\lambda) \;=\; 0 \tag{4.66}$$

なる $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{y},\lambda)$ が $(\boldsymbol{y},\lambda)=(0,0)$ の近傍でユニークに定まる. ここで $g\in G_0$ に対して,

$$\begin{aligned}
P\Phi(\boldsymbol{y}+D(g)^{-1}\boldsymbol{z}(D(g)\boldsymbol{y},\lambda),\lambda) &= P\Phi(D(g)^{-1}(D(g)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}(D(g)\boldsymbol{y},\lambda),\lambda)\\
&= PD(g)^{-1}\Phi(D(g)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}(D(g)\boldsymbol{y},\lambda),\lambda)\\
&= D(g)^{-1}P\Phi(D(g)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}(D(g)\boldsymbol{y},\lambda),\lambda)\\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.67}$$

を得る．ここで第二の等号は $\mathbf{\Phi}$ の G_0 共変性 (4.23) を使い，第三の等号は P と $D(g)$ の可換性を使い，第四の等号は $D(g)\boldsymbol{y} \in \ker L$ であり，$\boldsymbol{y} = D(g)\boldsymbol{y}$ のときの (4.66) を用いた．$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{y}, \lambda)$ の一意性より，$D(g)^{-1}\boldsymbol{z}(D(g)\boldsymbol{y}, \lambda) = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{y}, \lambda)$ すなわち

$$\boldsymbol{z}(D(g)\boldsymbol{y}, \lambda) \quad = \quad D(g)\boldsymbol{z}(\boldsymbol{y}, \lambda) \tag{4.68}$$

を得る．これを使うと

$$\begin{aligned}
\phi(D(g)\boldsymbol{y}, \lambda) &= (E - P)\mathbf{\Phi}(D(g)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}(D(g)\boldsymbol{y}, \lambda), \lambda) \\
&= (E - P)\mathbf{\Phi}(D(g)\boldsymbol{y} + D(g)\boldsymbol{z}(\boldsymbol{y}, \lambda), \lambda) \\
&= (E - P)\mathbf{\Phi}(D(g)(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}(\boldsymbol{y}, \lambda)), \lambda) \\
&= (E - P)D(g)\mathbf{\Phi}((\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}(\boldsymbol{y}, \lambda)), \lambda) \\
&= D(g)(E - P)\mathbf{\Phi}((\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}(\boldsymbol{y}, \lambda)), \lambda)
\end{aligned} \tag{4.69}$$

を得る．したがって

$$\phi(D(g)\boldsymbol{y}, \lambda) \quad = \quad D(g)\phi(\boldsymbol{y}, \lambda) \tag{4.70}$$

が成り立つ．これは ϕ も G_0 共変であることを示す．▮

変分問題 $\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x}, \lambda) = 0$ の解 $\boldsymbol{x}_a$ の固定部分群 (isotropy subgroup) $G(\boldsymbol{x}_a)$ は次式で定義される．

$$G(\boldsymbol{x}_a) \quad = \quad \{g \in G_0 \mid g \cdot \boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{x}_a\} \tag{4.71}$$

解 $\boldsymbol{x}_a$ の固定部分群 $G(\boldsymbol{x}_a)$ は $\boldsymbol{x}_a$ の不変部分群 (invariance group) とも呼ばれ，解の対称性を表す．変分問題 $\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x}, \lambda) = 0$ の解の固定部分群に関して次の定理が成り立つ．

定理 4.3 $\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x}, \lambda) = 0$ の解を $\boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{y}_a + \boldsymbol{z}_a$ とする．ここで $\boldsymbol{y}_a \in \ker L$ で $\boldsymbol{z}_a \in M$ である．そのとき $\boldsymbol{x}_a$ の固定部分群 $G(\boldsymbol{x}_a)$ は分岐方程式

$$\phi(\boldsymbol{y}, \lambda) \quad = \quad 0 \tag{4.72}$$

の解 $\boldsymbol{y}_a$ の固定部分群

$$G(\boldsymbol{y}_a) \quad = \quad \{g \in G_0 \mid g \cdot \boldsymbol{y}_a = \boldsymbol{y}_a\} \tag{4.73}$$

に等しい．

証明

$\boldsymbol{y}_a$ を分岐方程式 $\phi(\boldsymbol{y}_a, \lambda) = 0$ の解とする．$\boldsymbol{y}_a$ の固定部分群を $G(\boldsymbol{y}_a)$ とすると

$$D(g)\boldsymbol{y}_a \quad = \quad \boldsymbol{y}_a \quad \text{for all } g \in G(\boldsymbol{y}_a) \tag{4.74}$$

となり $\boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{y}_a + \boldsymbol{z}(\boldsymbol{y}_a, \lambda)$ であるので $g \in G(\boldsymbol{y}_a)$ に対して

$$\begin{aligned} D(g)\boldsymbol{x}_a &= D(g)\boldsymbol{y}_a + D(g)\boldsymbol{z}(\boldsymbol{y}_a, \lambda) \\ &= \boldsymbol{y}_a + \boldsymbol{z}(D(g)\boldsymbol{y}_a, \lambda) \\ &= \boldsymbol{y}_a + \boldsymbol{z}(\boldsymbol{y}_a, \lambda) \\ &= \boldsymbol{x}_a \end{aligned} \tag{4.75}$$

となり $g \in G(\boldsymbol{x}_a)$ である．逆に $g \in G(\boldsymbol{x}_a)$ とすると

$$\begin{aligned} D(g)\boldsymbol{x}_a &= D(g)(\boldsymbol{y}_a + \boldsymbol{z}(\boldsymbol{y}_a, \lambda)) \\ &= D(g)\boldsymbol{y}_a + D(g)\boldsymbol{z}(\boldsymbol{y}_a, \lambda) \\ &= D(g)\boldsymbol{y}_a + \boldsymbol{z}(D(g)\boldsymbol{y}_a, \lambda) \\ &= \boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{y}_a + \boldsymbol{z}(\boldsymbol{y}_a, \lambda) \end{aligned} \tag{4.76}$$

を得る．これより $D(g)\boldsymbol{y}_a = \boldsymbol{y}_a$ を得る．したがって，$g \in G(\boldsymbol{y}_a)$ となり $G(\boldsymbol{x}_a) = G(\boldsymbol{y}_a)$ となる．∎

この定理より変分問題 $\Phi(\boldsymbol{x}_a, \lambda) = 0$ の解 $\boldsymbol{x}_a$ の固定部分群 $G(\boldsymbol{x}_a)$ は，V_R^n より次元の低い部分空間 ker L の中での分岐方程式 $\phi(\boldsymbol{y}, \lambda) = 0$ の解の固定部分群が分かれば求まることになる．

それでは V_R^n の部分空間 ker L は群 G_0 との関連でどのような特性をもっているか？群 G_0 の情報が部分空間 ker L の構造を規定出来るか？それに答えるのが第4.6節の定理である．

4.6 ker L の既約性

前節で V_R^n の部分空間 ker L の中で固定部分群を求めればよいことが分かった．一般的には ker L は V_R^n の群 G_0 に関して既約な部分空間であることが示される.[5)]

定理 4.4 (ker$L$ の既約性)

$$\begin{aligned} D(g)\Phi(\boldsymbol{x}, \lambda) &= \Phi(D(g)\boldsymbol{x}, \lambda) \quad \text{for } g \in G_0, \\ \Phi(0,0) &= 0, \\ L &= d\Phi(0,0), \end{aligned} \tag{4.77}$$

とするとき，一般的 (generic)[1] には ker L は G_0 に関して V_R^n の既約な部分空間である．

証明は Golubitsky 等[5)] による証明 **(a)** と，限定的な場合にのみ成り立つ，2次の多項式を使った証明 **(b)** を挙げておく．

証明 (a)

ここでは $V_R^n =$ ker L$\oplus M$ において ker L が可約であるとする．すなわち

$$\ker L = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k \tag{4.78}$$

[1] ある性質Aがパラメーター空間の点Xで成り立つとき，Xの近傍でもAが成立するとき，性質Aは一般的 (generic) であるという．

とする．ここで V_j $(j=1,\cdots,k)$ は既約な部分空間とする．P_1 を次のような射影演算子とする：

$$\begin{aligned} P_1 \mid M &= 0 \\ P_1 \mid V_1 &= 0 \\ P_1 \mid V_j &= E_{V_j} \quad \text{for } j \neq 1 \end{aligned} \tag{4.79}$$

ここで $P_1 \mid X$ の記号 "$\mid X$" は演算を部分空間 X に制限することを意味し，E_{V_j} は部分空間 V_j での恒等写像を表す．$\Phi(\boldsymbol{x},\lambda)$ に G_0 共変な小さな摂動 $\epsilon P_1 \boldsymbol{x}$ を加えた

$$\Phi_\epsilon(\boldsymbol{x},\lambda) = \Phi(\boldsymbol{x},\lambda) + \epsilon P_1 \boldsymbol{x} \tag{4.80}$$

を考える．ここで ϵ は小さな実数とする．これに対応する L_ϵ は

$$L_\epsilon = d\Phi_\epsilon(0,0) = d\Phi(0,0) + \epsilon P_1 = L + \epsilon P_1 \tag{4.81}$$

となる．ここで $\boldsymbol{y} \in V_1 \subset \ker L$ を取ると

$$L_\epsilon \boldsymbol{y} = L\boldsymbol{y} + \epsilon P_1 \boldsymbol{y} = 0 \tag{4.82}$$

したがって $V_1 \subset \ker L_\epsilon$．また $\boldsymbol{z} \in M$ に対して

$$L_\epsilon \boldsymbol{z} = L\boldsymbol{z} + \epsilon P_1 \boldsymbol{z} = L\boldsymbol{z} \neq 0 \tag{4.83}$$

であり，$\boldsymbol{y}_j \in V_j$ $(j \neq 1) \subset \ker L$ に対して

$$L_\epsilon \boldsymbol{y}_j = L\boldsymbol{y}_j + \epsilon P_1 \boldsymbol{y}_j = \epsilon \boldsymbol{y}_j \neq 0 \tag{4.84}$$

をえる．故に $V_2 \oplus \cdots V_k$ は $\ker L_\epsilon$ では無くなる．したがって小さな摂動 $\epsilon P_1 \boldsymbol{x}$ で $\ker\ L$ が大きく変化する．故に小さな摂動 $\epsilon P_1 \boldsymbol{x}$ で $\ker\ L$ が大きく変化しない為には，すなわち一般的 (generic) には，$\ker L$ が既約でなければならない．▮

証明 (b)

$\Phi(0,0)=0$ として $F(\boldsymbol{x},0)$ を $\boldsymbol{x}$ で展開すると，

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x},0) &= F(0,0) + \sum_{ij} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0,0) x_i x_j + F^3(\boldsymbol{x},0) \\ &= F(0,0) + \sum_{ij} \frac{1}{2} L_{ij} x_i x_j + F^3(\boldsymbol{x},0) \end{aligned} \tag{4.85}$$

ここで $F^3(\boldsymbol{x},0)$ は $\boldsymbol{x}$ の 3 次以上の項を表す．2 次の項を

$$F^2(\boldsymbol{x},0) = \sum_{ij} \frac{1}{2} L_{ij} x_i x_j \tag{4.86}$$

と表す．V_R^n を G_0 の既約成分に分解する．

$$V_R^n = V_R^1 \oplus V_R^2 \oplus \cdots, \oplus V_R^\gamma \oplus \cdots \tag{4.87}$$

すなわち $\boldsymbol{x} \in V_R^n$ は

$$\boldsymbol{x} = \sum_\gamma \sum_m x_m^\gamma l_m^\gamma \tag{4.88}$$

と分解する．ここで $l_m^\gamma \in V_R^n$ は既約表現 γ の m 番目の基底であり $g \in G_0$ に対して

$$g \cdot l_m^\gamma = \sum_{m'} D_{m'm}^\gamma(g) l_{m'}^\gamma \tag{4.89}$$

と変換する．ここで (4.95) における既約表現 γ についての和の中で，

$$\text{仮定 B} \quad : \quad \text{同値な既約表現は 2 回以上現われない} \tag{4.90}$$

と仮定する．$g \cdot \boldsymbol{x}$ は

$$\begin{aligned} g \cdot \boldsymbol{x} &= \sum_\gamma \sum_m x_m^\gamma (g \cdot l_m^\gamma) \\ &= \sum_\gamma \sum_m x_m^\gamma \sum_{m'} D_{m'm}^\gamma(g) l_{m'}^\gamma \\ &= \sum_\gamma \sum_{m'} \{\sum_m D_{m'm}^\gamma(g) x_m^\gamma\} l_{m'}^\gamma \end{aligned} \tag{4.91}$$

となる．$\boldsymbol{x}$, $g \cdot \boldsymbol{x}$ の第 i 成分は

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{x})_i &= \textstyle\sum_\gamma \sum_m x_m^\gamma (l_m^\gamma)_i \\ (g \cdot \boldsymbol{x})_i &= \textstyle\sum_\gamma \sum_{m'} \{\sum_m D_{m'm}^\gamma(g) x_m^\gamma\} (l_{m'}^\gamma)_i \end{aligned} \tag{4.92}$$

である．したがって $F^2(g \cdot \boldsymbol{x}, 0)$ は

$$\begin{aligned} F^2(g \cdot \boldsymbol{x}, 0) &= \frac{1}{2} \sum_{ij} L_{ij} (g \cdot \boldsymbol{x})_i (g \cdot \boldsymbol{x})_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} L_{ij} (\sum_\alpha \sum_{m'} \{\sum_m D_{m'm}^\alpha(g) x_m^\alpha\} (l_{m'}^\alpha)_i)(\sum_\beta \sum_{n'} \{\sum_n D_{n'n}^\beta(g) x_n^\beta\} (l_{n'}^\beta)_j \end{aligned} \tag{4.93}$$

ここで α, β は G_0 の既約表現である．$F(g \cdot \boldsymbol{x}, 0) = F(\boldsymbol{x}, 0)$ を考慮すると

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}, 0) &= \frac{1}{|G_0|} \sum_{g \in G_0} F(g \cdot \boldsymbol{x}, 0) \\ &= \sum_{ij} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{m,n} \sum_{m',n'} \{\sum_{g \in G_0} \frac{1}{|G_0|} D_{m'm}^\alpha(g) D_{n'n}^\beta(g)\} \{\sum_{ij} (l_{m'}^\alpha)_i L_{ij} (l_{n'}^\beta)_j\} x_m^\alpha x_n^\beta \\ &= \sum_\alpha \sum_m \{\frac{1}{d_\alpha} \sum_{m'} F_{m'm'}^{\alpha\alpha}\} (x_m^\alpha)^2 \\ &= \sum_\alpha K^\alpha \sum_m (x_m^\alpha)^2 \end{aligned} \tag{4.94}$$

を得る．ここで表現行列の直交性定理

$$\frac{1}{|G_0|} \sum_{g \in G_0} D_{m'm}^\alpha(g) D_{n'n}^\beta(g) = \frac{1}{d_\alpha} \delta_{\alpha,\beta} \delta_{m,n} \delta_{m',n'} \tag{4.95}$$

および記号

$$
\begin{aligned}
F^{\alpha\beta}_{m,n} &= \sum_{ij}(l^{\alpha}_{m})_i L_{ij} (l^{\beta}_{n})_j \\
K^{\alpha} &= \frac{1}{d_\alpha}\sum_{m} F^{\alpha\alpha}_{mm}
\end{aligned}
\tag{4.96}
$$

を用いた．ker L が生じるのは, (4.94) に於いてどれかの K^α がゼロになるときである．一般的 (generic) にはただ一つの K^α がゼロになることが考えられ, 異なる既約表現 α, β ($\neq \alpha$) に対応する K^α, K^β が同時にゼロになることは偶然的である．ここで**仮定 B** が必要な理由は, 直交性定理に於いて, 既約空間 V^α_R と V^β_R が異なる部分空間であっても同値な既約表現に属するときは, (4.95) の和がゼロにならず x^α_m と x^β_m がカップルするからである．∎

例 4.3 (D_4 不変な関数の ker L) 3次元ユークリッド空間 E^3 上のパラメーター $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_3)$ を持つ $\boldsymbol{D_4}$ 不変な関数

$$
\begin{aligned}
F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) &= F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_3) = \lambda_1(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_3 x_3^2 \\
&\quad + \beta_1(x_1^2 x_2^2) + \beta_2(x_1^4 + x_2^4) + \beta_3 x_3^4 + \beta_4(x_1^2 + x_2^2)x_3^2
\end{aligned}
\tag{4.97}
$$

を考える．対応する $\boldsymbol{\Phi}$ は次の様になる:

$$
\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \\ \frac{\partial F}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 x_1 + 2\beta_1 x_1 x_2^2 + 4\beta_2 x_1^3 + 2\beta_4 x_1 x_3^2 \\ \\ 2\lambda_1 x_2 + 2\beta_1 x_1^2 x_2 + 4\beta_2 x_2^3 + 2\beta_4 x_2 x_3^2 \\ \\ 2\lambda_3 x_3 + 4\beta_3 x_3^3 + 2\beta_4(x_1^2 + x_2^2)x_3 \end{pmatrix}
\tag{4.98}
$$

これより

$$
d\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda_3 \end{pmatrix}
\tag{4.99}
$$

得る．一般的 (generic) には $\lambda_1 \neq \lambda_3$ であり, $\lambda_1 = 0, \lambda_3 \neq 0$ の時,

$$
L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda_3 \end{pmatrix}
\tag{4.100}
$$

$$
\ker L = \{e_1, e_2\}_R: \ \text{E 表現}
\tag{4.101}
$$

となり, $\lambda_1 \neq 0, \lambda_3 = 0$ の時,

$$
L = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\tag{4.102}
$$

$$
\ker L = \{e_3\}_R: \ \text{A2 表現}
\tag{4.103}
$$

となる．ker　L が既約空間であることが分かる．∎

4.7 共変分岐定理

前節の定理4.3と定理4.4より既約な空間の中で固定部分群を見ていけばよい．それではある既約な空間 $V_{\mathrm{ker}} = \ker L$ の中でどのような固定部分群を持った $\boldsymbol{y} \in V_{\mathrm{ker}}$ が

$$\phi(\boldsymbol{y}, \lambda) \;=\; 0 \tag{4.104}$$

の解になり得るか? これに答えるのがこれから述べる共変分岐定理[5, 2, 3] (Equivariant Branching Lemma) である．

$G \subset G_0$ を G_0 の部分群とする．V における G の**固定点部分空間** (fixed-point subspace) Fix(G) は

$$\mathrm{Fix}(G) \;=\; \{\boldsymbol{x} \in V \mid D(g)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \quad \text{for all } g \in G\} \tag{4.105}$$

で定義される．これは G に不変なベクトルからなる部分空間である．

例 4.4 $G_0 = \boldsymbol{D}_4$, $V = V^E = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}_R : E$ 表現の場合．
V^E における $\boldsymbol{D}_4$ の部分群の不動点部分空間は次の様になることは容易に分かる．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fix}(\boldsymbol{D}_4) &= \{0\}_R \\
\mathrm{Fix}(\boldsymbol{C}_4) &= \{0\}_R \\
\mathrm{Fix}(\boldsymbol{D}_2) &= \{0\}_R \\
\mathrm{Fix}(\boldsymbol{D}_{2a}) &= \{0\}_R \\
\mathrm{Fix}(\boldsymbol{C}_{2z}) &= \{0\}_R \\
\mathrm{Fix}(\boldsymbol{C}_{2x}) &= \{\boldsymbol{e}_1\}_R \\
\mathrm{Fix}(\boldsymbol{C}_{2y}) &= \{\boldsymbol{e}_2\}_R \\
\mathrm{Fix}(\boldsymbol{C}_{2a}) &= \{\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)\}_R \\
\mathrm{Fix}(\boldsymbol{C}_{2b}) &= \{\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2)\}_R \\
\mathrm{Fix}(\boldsymbol{C}_1) &= \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}_R
\end{aligned}$$

上の例で不動点部分空間が1次元空間になるのは, $\mathrm{Fix}(\boldsymbol{C}_{2x}), \mathrm{Fix}(\boldsymbol{C}_{2y}), \mathrm{Fix}(\boldsymbol{C}_{2a}), \mathrm{Fix}(\boldsymbol{C}_{2b})$ の4個である．次の共変分岐定理 (Equivariant Branching Lemma) [2]により Fix(G) の次元が1となる G_0 の部分群 G が重要な役割を果たす．まず準備として次の補題を証明する．

補題 4.1 $\phi(\boldsymbol{y}, \lambda) = (E - P)\Phi(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}(\boldsymbol{y}, \lambda), \lambda)$ としたとき，
$d\phi(0, 0) = 0$ である．ここで $d\phi(\boldsymbol{y}, \lambda)$ は $\boldsymbol{y} \in \ker L$ に関するヤコビ行列である．

証明 $\ker L$ の基底を $\boldsymbol{l}_1^0, \cdots, \boldsymbol{l}_m^0$ とすると $\boldsymbol{y} \in \ker L$ は

$$\boldsymbol{y} \;=\; \sum_{i=1}^{m} y_i \boldsymbol{l}_i^0 \tag{4.107}$$

---

[2] 文献[5]には [Equivariant Branching Lemma] とよばれているがここでは本講義の中心的な命題であるので [共変分岐定理] と呼ぶことにする．

と表される．$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{y},\lambda)$ は

$$P\Phi(\sum_{i=1}^{m} y_i \boldsymbol{l}_i^0 + \boldsymbol{z}(\sum_{i=1}^{m} y_i \boldsymbol{l}_i^0, \lambda), \lambda) = 0 \tag{4.108}$$

の解である．第 l 成分を顕わに書くと

$$\sum_m P_{lm}\Phi_m(\sum_{i=1}^{m} y_i \boldsymbol{l}_i^0 + \boldsymbol{z}(\sum_{i=1}^{m} y_i \boldsymbol{l}_i^0, \lambda), \lambda) \quad = \quad 0 \tag{4.109}$$

これを y_i で微分して $(\boldsymbol{y},\lambda) = (0,0)$ と置くと

$$\begin{aligned} & \sum_m \quad P_{lm}\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_k}(0,0)\frac{\partial(\sum_i y_i(\boldsymbol{l}_i^0)_k + z_k(\sum_{i=1}^m y_i \boldsymbol{l}_i^0, \lambda))}{\partial y_i} \\ = & \quad \sum_m P_{lm}L_{mk}((\boldsymbol{l}_i^0)_k + \frac{\partial z_k}{\partial y_i}(0,0)) = 0 \end{aligned} \tag{4.110}$$

これより

$$PL(\boldsymbol{l}_i^0 + \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial y_i}(0,0)) \quad = \quad L\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial y_i}(0,0)) = 0 \tag{4.111}$$

ここで $\boldsymbol{l}_i^0 \in \ker L$ より $L\boldsymbol{l}_i^0 = 0$ を使った．$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{y},\lambda) \in M$ であるので $\dfrac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial y_i}(0,0) \in M$，一方

$$L \ : \ M \Longrightarrow \text{range } L \tag{4.112}$$

は正則であるので

$$(\boldsymbol{z}_i)_{00} \quad \equiv \quad \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial y_i}(0,0) = 0 \tag{4.113}$$

となる．同様に

$$\phi(\boldsymbol{y},\lambda) = (E-P)\Phi(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}(\boldsymbol{y},\lambda),\lambda) = 0 \tag{4.114}$$

を y_i で微分して $(\boldsymbol{y},\lambda) = (0,0)$ と置くと

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(0,0) \quad &= \quad (E-P)(d\Phi)_{00}(\boldsymbol{l}_i^0 + (\boldsymbol{z}_i)_{00}) \\ &= \quad (E-P)L\boldsymbol{l}_i^0 = 0 \end{aligned} \tag{4.115}$$

を得る．したがって $(d\phi)(0,0) = 0$ が証明された．∎

補題 4.2 一般的 (generic) には

$$(d\phi_\lambda)(0,0) \quad \neq 0 \tag{4.116}$$

ここで $\phi_\lambda = \dfrac{\partial \phi}{\partial \lambda}(\boldsymbol{y},\lambda)$ である．

証明 Sattiner の定理により $\boldsymbol{y} \in \ker L$ に対して

$$\phi(D(g)\boldsymbol{y},\lambda) = D(g)\phi(\boldsymbol{y},\lambda) \text{ for } g \in G_0 \tag{4.117}$$

両辺の $\boldsymbol{y}$ に関するヤコビ行列を取って, $(\boldsymbol{y},\lambda)=(0,\lambda)$ と置くと,

$$(d\phi)(0,\lambda)D(g) = D(g)(d\phi)(0,\lambda) \tag{4.118}$$

を得る． $\ker L$ が既約とするとシュールの補題より

$$(d\phi)(0,\lambda) = c(\lambda)\mathbf{1} = \begin{pmatrix} c(\lambda) & & & 0 \\ 0 & c(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c(\lambda) \end{pmatrix} \tag{4.119}$$

なる $c(\lambda) \in \mathbf{R}$ を得る．補題 4.1 より $(d\phi)(0,0)=0$, したがって $c(0)=0$ となる．$c(0)=0$ で, しかも $\dfrac{dc}{d\lambda}(0)=0$ となるのは一般的には起こらない．したがって一般的 (generic) には

$$\frac{dc}{d\lambda}(0) = c'(0) \neq 0 \tag{4.120}$$

と仮定することが出来る．したがって一般的 (genrric) には

$$(d\phi_\lambda)(0,0) = \left(\frac{d\{(d\phi)(0,\lambda)\}}{d\lambda}\right)(0,0) = c(0)'\mathbf{1} \neq 0 \tag{4.121}$$

と考えられる．▮

次の定理 [5] は G_0 の部分群 G でその固定点部分空間 $\mathrm{Fix}(G)$ が 1 次元の場合, 必ず固定点部分空間 $\mathrm{Fix}(G)$ 内に, 分岐方程式 $\phi(\boldsymbol{y},\lambda)=0$ の解のがあることを保障するものである．

定理 4.5 (共変分岐定理) G_0 が既約なベクトル空間 V_R^γ に作用しているとする．次の 3 つの条件が成立すると仮定する．

(a) $\mathrm{Fix}\ (G_0)=\{0\}$, ($\gamma$ が恒等表現以外では必ず成り立つ)

(b) ある G_0 の部分群 G について $\dim \mathrm{Fix}(G)=1$.

(c) $\{(d\phi_\lambda)(0,0)\}(\boldsymbol{v}_0) \neq 0$ for $\boldsymbol{v}_0 \in \mathrm{Fix}(G)$.

このとき, $\phi(s\boldsymbol{v}_0,\lambda(s))=0$ となる分岐解 $(\boldsymbol{y},\lambda)=(s\boldsymbol{v}_0,\lambda(s))$ がある．ここで $\lambda(0)=0$ であり,

$$\phi_\lambda(\boldsymbol{y},\lambda) = \frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(\boldsymbol{y},\lambda) \tag{4.122}$$

である．$d\phi_\lambda(\boldsymbol{y},\lambda)$ は ϕ_λ の $\boldsymbol{y}$ についてのヤコビ行列である．

証明[3] Sattinger の定理 4.2 より $\boldsymbol{y} \in \ker L$, $g \in G_0$ に対して

$$D(g)\phi(\boldsymbol{y},\lambda) = \phi(D(g)\boldsymbol{y},\lambda) \tag{4.123}$$

[3] Golubitsky らの教科書 [5] の証明に従った.

が成り立ち, $g \in G$, $\boldsymbol{y}_a \in \mathrm{Fix}(G)$ すなわち $D(g)\boldsymbol{y}_a = \boldsymbol{y}_a$ なる $\boldsymbol{y}_a$ に対して

$$\begin{array}{ccc} \phi(D(g)\boldsymbol{y}_a, \lambda) & = & D(g)\phi(\boldsymbol{y}_a, \lambda) \\ \| & & \\ \phi(\boldsymbol{y}_a, \lambda) & & \end{array} \tag{4.124}$$

が成立する. したがって $\phi(\boldsymbol{y}_a, \lambda) \in \mathrm{Fix}(G)$, すなわち

$$\phi(\mathrm{Fix}(G), \lambda) \quad \subset \quad \mathrm{Fix}(G) \tag{4.125}$$

を得る. $\dim \mathrm{Fix}(G) = 1$ より s を実数として

$$\phi(s\boldsymbol{v}_0, \lambda) \quad = \quad h(s, \lambda)\boldsymbol{v}_0 \tag{4.126}$$

と書くことが出来る. ここで $h(s, \lambda)$ は実数値関数である.

$\mathrm{Fix}(G_0) = \{0\}$ であるので $0 \in \mathrm{Fix}(G_0)$ に注意すると (4.125) より

$$\phi(0, \lambda) \quad \in \quad \mathrm{Fix}(G_0) = \{0\} \tag{4.127}$$

すなわち

$$\phi(0, \lambda) \quad = \quad 0 \tag{4.128}$$

これは $\boldsymbol{y} = 0$ なる**自明 (trivial)** な解が常に存在することを示している. したがって

$$h(0, \lambda) = 0 \tag{4.129}$$

これよりテイラー展開を考えると $h(s, \lambda) = k(s, \lambda)s$ と書くことが出来て,

$$\phi(s\boldsymbol{v}_0, \lambda) \quad = \quad k(s, \lambda)s\boldsymbol{v}_0 \tag{4.130}$$

を得る. 両辺を s で微分して $(s, \lambda) = (0, 0)$ と置くと

$$\begin{aligned} (d\phi_{0,0})(\boldsymbol{v}_0) &= (k_s(s, \lambda)s + k(s, \lambda))_{0,0}\boldsymbol{v}_0 \\ &= k(0, 0)\boldsymbol{v}_0 \end{aligned} \tag{4.131}$$

を得る. $d\phi(0, 0) = d\phi_{0,0} = 0$ であるので, $k(0, 0) = 0$ を得る. (4.130) を λ で微分して得た

$$\phi_\lambda(s\boldsymbol{v}_0, \lambda) \quad \equiv \quad \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(s\boldsymbol{v}_0, \lambda) = k_\lambda(s, \lambda)s\boldsymbol{v}_0 \tag{4.132}$$

を s で微分して $(s, \lambda) = (0, 0)$ と置くと

$$\{(d\phi_\lambda)(0, 0)\}\boldsymbol{v}_0 = k_\lambda(0, 0)\boldsymbol{v}_0 \tag{4.133}$$

を得る. 仮定より $\{(d\phi_\lambda)(0, 0)\}(\boldsymbol{v}_0) \neq 0$ となって

$$k_\lambda(0, 0) \neq 0 \tag{4.134}$$

を得る. 陰関数の定理より $\lambda(0)=0$ で

$$k(s,\lambda(s)) \;=\; 0 \tag{4.135}$$

なる $k(s,\lambda)=0$ の解 $\lambda(s)$ が一意的に定まる. (4.130) より $\phi(s\boldsymbol{v}_0,\lambda)=0$ の解が必ず存在する. ∎

この定理によって, G_0 の部分群 G でその固定点部分空間 $\mathrm{Fix}(G)$ の次元が 1 のものがあれば, その方向に必ず解の分岐があることが分かる. 第 4.8 節では共変分岐定理を利用して, $\boldsymbol{D}_4$ 不変な関数の極値問題を解く.

4.8 D_4 不変な関数の極値問題

例 4.3 で考察した $\boldsymbol{D}_4$ 不変な関数

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) \;&=\; F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_3)=\lambda_1(x_1^2+x_2^2)+\lambda_3x_3^2 \\ &\quad +\beta_1(x_1^2x_2^2)+\beta_2(x_1^4+x_2^4)+\beta_3x_3^4+\beta_4(x_1^2+x_2^2)x_3^2 \end{aligned} \tag{4.136}$$

の変分問題を考える. 対応する極値を与える方程式は次の様になる:

$$\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) \\ \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) \\ \\ \frac{\partial F}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1x_1+2\beta_1x_1x_2^2+4\beta_2x_1^3+2\beta_4x_1x_3^2=0 \\ \\ 2\lambda_1x_2+2\beta_1x_1^2x_2+4\beta_2x_2^3+2\beta_4x_2x_3^2=0 \\ \\ 2\lambda_3x_3+4\beta_3x_3^3+2\beta_4(x_1^2+x_2^2)x_3=0 \end{pmatrix} \tag{4.137}$$

これより

$$d\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\lambda}) \;=\; \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda_3 \end{pmatrix} \tag{4.138}$$

を得る. (4.137) の解に分岐があるのは $\det\{d\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\lambda})\}=0$ の場合である. パラメーター空間 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_3)$ の **[1]** $(\lambda_1,\lambda_3)=(0,\lambda_3)$ $(\lambda_3\neq 0)$ の近傍と, **[2]** $(\lambda_1,\lambda_3)=(\lambda_1,0)$ $(\lambda_1\neq 0)$ の近傍を考える.

[1] $\lambda_3\neq 0$ で $\lambda_1=0$ の近傍

$\lambda_1=0,\ \lambda_3\neq 0$ の時,

$$L \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda_3 \end{pmatrix} \tag{4.139}$$

となり

$$\begin{aligned} \ker L \;&=\; V_R^E=\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}_R:\ \text{E 表現} \\ M \;&=\; \{\boldsymbol{e}_3\}_R \end{aligned} \tag{4.140}$$

となる．したがって 2 次元ベクトル空間 V_R^E の中での $\boldsymbol{D}_4$ の部分群の不動点部分空間が 1 次元になるものを見出せば，その空間に必ず解が存在する．例 5.3 より $\boldsymbol{D}_4$ の部分群で V_R^E において固定点部分空間が 1 次元になるのは $\boldsymbol{C}_{2x}, \boldsymbol{C}_{2y}, \boldsymbol{C}_{2a}, \boldsymbol{C}_{2b}$ の 4 個で，その固定点部分空間は

$$\begin{aligned} \mathrm{Fix}\ (\boldsymbol{C}_{2x}) &= \{e_1\}_R \\ \mathrm{Fix}\ (\boldsymbol{C}_{2y}) &= \{e_2\}_R \\ \mathrm{Fix}\ (\boldsymbol{C}_{2a}) &= \{\tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)\}_R \\ \mathrm{Fix}\ (\boldsymbol{C}_{2b}) &= \{\tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1-e_2)\}_R \end{aligned} \tag{4.141}$$

となる．これより ker L 内で **(1)** $\boldsymbol{e}_1$, **(2)** $\boldsymbol{e}_2$, **(3)** $\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$, **(4)** $\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$ の方向に分岐方程式 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y},\lambda_1)=0$ の解をもつことが分かる．4 個のそれぞれの場合に分けて考える．

(1) $\boldsymbol{y} = xe_1 \in \ker L, \boldsymbol{z} = ze_3 \in M$ として (4.137) の解を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} = xe_1+ze_3$ とする．$\boldsymbol{y}$ は $C_{2x} \in \boldsymbol{C}_{2x}$ に不変であり，定理 4.3 により $\boldsymbol{x}$ は $C_{2x} \in \boldsymbol{C}_{2x}$ に対して不変であるので

$$C_{2x}\cdot\boldsymbol{x} \;=\; xe_1+z(-e_3) = xe_1+ze_3 \tag{4.142}$$

となり $z=0$ を得る．したがって $\boldsymbol{x} = xe_1 = (x,0,0)$ のタイプの解が $(\boldsymbol{x},\lambda_1)=(0,0)$ の近傍で存在する．$\boldsymbol{x}=(x,0,0)$ を (4.137) に代入すると

$$\Phi_1(x,0,0,\lambda_1) \;=\; 2\lambda_1x^2+4\beta_2x^3 = 0 \tag{4.143}$$

を得る．これより $\lambda_1 \le 0$ の時

$$x_\pm \;=\; \pm\sqrt{\frac{-\lambda_1}{2\beta_2}} \tag{4.144}$$

を得る．したがって $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\lambda_1)=0$ の解として

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{(1,0,0)} &= (\sqrt{\tfrac{-\lambda_1}{2\beta_2}},0,0) \\ \boldsymbol{x}_{(-1,0,0)} &= (-\sqrt{\tfrac{-\lambda_1}{2\beta_2}},0,0) \end{aligned} \tag{4.145}$$

を得る．そこでの関数の極値は

$$F(\boldsymbol{x}_{(1,0,0)}) \;=\; F(\boldsymbol{x}_{(-1,0,0)}) = -\frac{\lambda_1^2}{4\beta_2} \tag{4.146}$$

となる．**(2)** 同様に $\boldsymbol{x}=(0,x,0)$ の型の解として

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{(0,1,0)} &= (0,\sqrt{\tfrac{-\lambda_1}{2\beta_2}},0) \\ \boldsymbol{x}_{(0,-1,0)} &= (0,-\sqrt{\tfrac{-\lambda_1}{2\beta_2}},0) \end{aligned} \tag{4.147}$$

を得る．そこでの関数の極値は

$$F(\boldsymbol{x}_{(0,1,0)}) \;=\; F(\boldsymbol{x}_{(0,-1,0)}) = -\frac{\lambda_1^2}{4\beta_2} \tag{4.148}$$

となる.

(3) $\boldsymbol{y} = x(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) \in \ker L,\ \boldsymbol{z} = z\boldsymbol{e}_3 \in M$ として (4.137) の解を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = x(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) + z\boldsymbol{e}_3$ とすれば, $G(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{C}_{2a}$ であり定理 4.3 により $\boldsymbol{x}$ も $C_{2a} \in \boldsymbol{C}_{2a}$ に対して不変であるので

$$C_{2x} \cdot \boldsymbol{x} \;=\; x(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) + z(-\boldsymbol{e}_3) = x(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) + z\boldsymbol{e}_3 \tag{4.149}$$

となり $z = 0$ を得る. したがって $\boldsymbol{x} = (x, x, 0)$ を (4.137) に代入すると

既約表現	解	極値	固定部分群
A_1	$\boldsymbol{x}_0 = (0,0,0)$	0	$\boldsymbol{D}_4$
E	$\boldsymbol{x}_{(1,0,0)} = (\sqrt{\frac{-\lambda_1}{2\beta_2}}, 0, 0)$	$-\frac{\lambda_1^2}{4\beta_2}$	$\boldsymbol{C}_{2x}$
	$\boldsymbol{x}_{(-1,0,0)} = (-\sqrt{\frac{-\lambda_1}{2\beta_2}}, 0, 0)$	$-\frac{\lambda_1^2}{4\beta_2}$	$\boldsymbol{C}_{2x}$
	$\boldsymbol{x}_{(0,1,0)} = (0, \sqrt{\frac{-\lambda_1}{2\beta_2}}, 0)$	$-\frac{\lambda_1^2}{4\beta_2}$	$\boldsymbol{C}_{2y}$
	$\boldsymbol{x}_{(0,-1,0)} = (0, -\sqrt{\frac{-\lambda_1}{2\beta_2}}, 0)$	$-\frac{\lambda_1^2}{4\beta_2}$	$\boldsymbol{C}_{2y}$
E	$\boldsymbol{x}_{(1,1,0)} = (\sqrt{\frac{-\lambda_1}{\beta_1+2\beta_2}}, \sqrt{\frac{-\lambda_1}{\beta_1+2\beta_2}}, 0)$	$-\frac{\lambda_1^2}{\beta_1+2\beta_2}$	$\boldsymbol{C}_{2a}$
	$\boldsymbol{x}_{(-1,-1,0)} = (\sqrt{\frac{-\lambda_1}{\beta_1+2\beta_2}}, -\sqrt{\frac{-\lambda_1}{\beta_1+2\beta_2}}, 0)$	$-\frac{\lambda_1^2}{\beta_1+2\beta_2}$	$\boldsymbol{C}_{2a}$
	$\boldsymbol{x}_{(1,-1,0)} = (\sqrt{\frac{-\lambda_1}{\beta_1+2\beta_2}}, -\sqrt{\frac{-\lambda_1}{\beta_1+2\beta_2}}, 0)$	$-\frac{\lambda_1^2}{\beta_1+2\beta_2}$	$\boldsymbol{C}_{2b}$
	$\boldsymbol{x}_{(-1,1,0)} = (-\sqrt{\frac{-\lambda_1}{\beta_1+2\beta_2}}, -\sqrt{-\frac{-\lambda_1}{\beta_1+2\beta_2}}, 0)$	$-\frac{\lambda_1^2}{\beta_1+2\beta_2}$	$\boldsymbol{C}_{2b}$
A_2	$\boldsymbol{x}_{(0,0,1)} = (0, 0, \sqrt{\frac{-\lambda_3}{2\beta_3}})$	$-\frac{\lambda_3^2}{4\beta_3}$	$\boldsymbol{C}_4$
	$\boldsymbol{x}_{(0,0,-1)} = (0, 0, -\sqrt{\frac{-\lambda_3}{2\beta_3}})$	$-\frac{\lambda_3^2}{4\beta_3}$	$\boldsymbol{C}_4$

表 4.1: $\boldsymbol{D}_4$ 不変な関数の極値問題の解とその固定部分群.

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, x, 0, \lambda_1) &= 2\lambda_1 x^2 + 2\beta_1 x^3 + 4\beta_2 x^3 = 0 \\ \Phi_2(x, x, 0, \lambda_1) &= 2\lambda_1 x^2 + 2\beta_1 x^3 + 4\beta_2 x^3 = 0 \end{aligned} \tag{4.150}$$

を得る．これより $\lambda_1 \le 0$ の時

$$x_{\pm} \;=\; \pm\sqrt{\frac{-\lambda_1}{\beta_1+2\beta_2}} \tag{4.151}$$

を得る．したがって $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\lambda_1)=0$ の解として

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{(1,1,0)} &= \left(\sqrt{\tfrac{\lambda_1}{\beta_1+2\beta_2}}, \sqrt{\tfrac{\lambda_1}{\beta_1+2\beta_2}}, 0\right) \\ \boldsymbol{x}_{(-1,-1,0)} &= \left(-\sqrt{\tfrac{-\lambda_1}{\beta_1+2\beta_2}}, -\sqrt{\tfrac{-\lambda_1}{\beta_1+2\beta_2}}, 0\right) \end{aligned} \tag{4.152}$$

を得る．そこでの関数の極値は

$$F(\boldsymbol{x}_{(1,1,0)}) \;=\; F(\boldsymbol{x}_{(-1,-1,0)}) = -\frac{\lambda_1^2}{\beta_1+2\beta_2} \tag{4.153}$$

となる．

(4) 同様に $\boldsymbol{x}=(x,-x,0)$ の型の解として

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{(1,-1,0)} &= \left(\sqrt{\tfrac{-\lambda_1}{\beta_1+2\beta_2}}, -\sqrt{\tfrac{-\lambda_1}{\beta_1+2\beta_2}}, 0\right) \\ \boldsymbol{x}_{(-1,1,0)} &= \left(-\sqrt{\tfrac{-\lambda_1}{\beta_1+2\beta_2}}, \sqrt{\tfrac{-\lambda_1}{\beta_1+2\beta_2}}, 0\right) \end{aligned} \tag{4.154}$$

を得る．そこでの関数の極値は

$$F(\boldsymbol{x}_{(1,-1,0)}) \;=\; F(\boldsymbol{x}_{(-1,1,0)}) = -\frac{\lambda_1^2}{\beta_1+2\beta_2} \tag{4.155}$$

となる．

解 $\boldsymbol{x}_{(1,0,0)}, \boldsymbol{x}_{(-1,0,0)}, \boldsymbol{x}_{(0,1,0)}, \boldsymbol{x}_{(0,-1,0)}$ はすべて同一の極値を持っている．これは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{(-1,0,0)} &= C_{2z}\cdot \boldsymbol{x}_{(1,0,0)} \\ \boldsymbol{x}_{(0,1,0)} &= C_{4z}^{+}\cdot \boldsymbol{x}_{(1,0,0)} \\ \boldsymbol{x}_{(0,-1,0)} &= C_{4z}^{-}\cdot \boldsymbol{x}_{(1,0,0)} \end{aligned} \tag{4.156}$$

が成り立ち，4 個の解は $\boldsymbol{D}_4$ の対称操作で結ばれており，$p\in \boldsymbol{D}_4$ に対して $F(p\cdot\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})=F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$ が成り立つからである．これに対応して解の固定部分群の間には共役部分群の関係がある:

$$G(\boldsymbol{x}_{(0,1,0)})=G(\boldsymbol{x}_{(0,-1,0)}) \;=\; \boldsymbol{C}_{2y}=C_{4z}^{+}\boldsymbol{C}_{2x}C_{4z}^{-}=C_{4z}^{+}G(\boldsymbol{x}_{(1,0,0)})C_{4z}^{-} \tag{4.157}$$

このように G_0 の元でお互いに移行する解は物理的には同値な解であり，それに対応して互いに共役な部分群も物理的に同値である．

同様に解 $\boldsymbol{x}_{(1,1,0)}, \boldsymbol{x}_{(-1,-1,0)}, \boldsymbol{x}_{(1,-1,0)}, \boldsymbol{x}_{(-1,1,0)}$ はすべて同一の極値を持っている．それは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{(-1,-1,0)} &= C_{2z}\cdot \boldsymbol{x}_{(1,1,0)} \\ \boldsymbol{x}_{(-1,1,0)} &= C_{4z}^{+}\cdot \boldsymbol{x}_{(1,1,0)} \\ \boldsymbol{x}_{(1,-1,0)} &= C_{4z}^{-}\cdot \boldsymbol{x}_{(1,1,0)} \end{aligned} \tag{4.158}$$

となり, 各解は $\boldsymbol{D}_4$ の対称操作で結ばれているからである. これに対応して解の固定部分群の間には共役部分群の関係がある:

$$G(\boldsymbol{x}_{(-1,1,0)}) = G(\boldsymbol{x}_{(1,-1,0)}) \quad = \quad C_{2b} = C_{4z}^{+}C_{2a}C_{4z}^{-} = C_{4z}^{+}G(\boldsymbol{x}_{(1,1,0)})C_{4z}^{-} \tag{4.159}$$

[2] $\lambda_1 \neq 0$ で $\lambda_3 = 0$ の近傍

$\lambda_1 \neq 0, \lambda_3 = 0$ の時,

$$L \quad = \quad \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \ker L &= \{e_3\}_R: \ \ \text{A2 表現} \\ M &= \{e_1, e_2\}_R \end{aligned}$$

となる. $\boldsymbol{y} = ze_3 \in \ker L$, $\boldsymbol{z} = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 \in M$ として, (4.137) の解を $\boldsymbol{x} = xe_3 + z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2$ とすれば定理4.3より $\boldsymbol{y} = xe_3$ は $C_{2z} \in \boldsymbol{C}_4$ に不変なので $\boldsymbol{x}$ も C_{2z} に不変となり

$$\begin{aligned} C_{2z} \cdot \boldsymbol{x} &= \ = xe_3 + z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 \\ &= \ xe_3 - z_1\boldsymbol{e}_1 - z_2\boldsymbol{e}_2 \end{aligned} \tag{4.160}$$

となり $z_1 = z_2 = 0$ を得る. したがって $\boldsymbol{x} = (0,0,x)$ の型の解が $(\boldsymbol{x}, \lambda_3) = (0,0)$ の近傍で存在する. $\boldsymbol{x} = (0,0,x)$ を (4.137) に代入すると

$$\Phi_3(0,0,x,\lambda_3) \quad = \quad 2\lambda_3 x + 4\beta_3 x^3 = 0 \tag{4.161}$$

を得る. これより $\lambda_3 \leq 0$ のとき

$$x_{\pm} \quad = \quad \pm\sqrt{\frac{-\lambda_3}{2\beta_3}} \tag{4.162}$$

を得る.

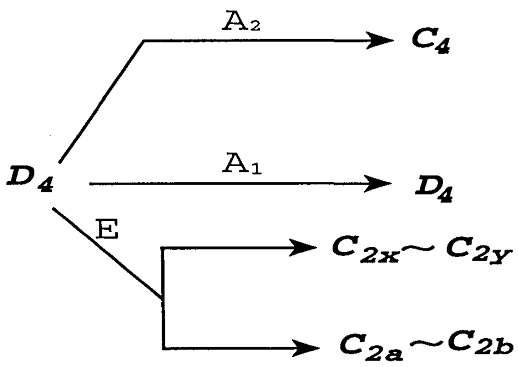

図 4.2: $\boldsymbol{D}_4$ 不変な関数の変分問題の解の分岐. $\boldsymbol{D}_4$ の既約表現と分岐解の固定部分群.

したがって $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\lambda_3)=0$ の解として

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{(0,0,1)} &= (0,0,\sqrt{\tfrac{-\lambda_1}{2\beta_2}}) \\ \boldsymbol{x}_{(0,0,-1)} &= (0,0,-\sqrt{\tfrac{-\lambda_1}{2\beta_2}}) \end{aligned} \tag{4.163}$$

を得る．そこでの関数の極値は

$$F(\boldsymbol{x}_{(0,0,1)}) = F(\boldsymbol{x}_{(0,0,-1)}) = -\frac{\lambda_3^2}{4\beta_3} \tag{4.164}$$

となる．$\boldsymbol{x}_{(0,0,-1)} = C_{2x}\cdot\boldsymbol{x}_{(0,0,1)}$ の関係に注意すると，上の二つの解が同一の極値をもつことは明らかである．以上をまとめると表 4.1 のようになる．$\boldsymbol{D}_4$ 不変な関数の変分問題の解の分岐と $\boldsymbol{D}_4$ の既約表現とそれから生じる分岐解の固定部分群を図 4.2 に示す．以上のような解析は $\boldsymbol{x}$ の 4 次式に限らず任意の $\boldsymbol{D}_4$ 不変な関数 $F(\boldsymbol{x},\lambda)$ に適用出来る．

第5章　正方対称性D_4を有する系のスピンシングレット超伝導の対称性：Ginzburg-Landau理論

この章では D_4 対称性を有する系のスピンシングレット超伝導の可能なクラスを考察する.[12]　スピン軌道相互作用が強い場合の超伝導状態の分類もこの章の同一の部分群で分類される.

5.1　スピンシングレット超伝導のオーダーパラメーターの空間

一般にスピンシングレット超伝導状態のオーダーパラメーター (order parameter) は運動量 $\boldsymbol{k}$ の複素数値関数

$$F(\boldsymbol{k}) \;=\; \langle a_{\boldsymbol{k}\uparrow}a_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\rangle = -\langle a_{\boldsymbol{k}\downarrow}a_{-\boldsymbol{k}\uparrow}\rangle \tag{5.1}$$

で記述される. ここで $a_{\boldsymbol{k}\lambda}$ は運動量 $\boldsymbol{k}$, スピン $\lambda(=\pm)$ を持つ電子の消滅演算子である. ギャップ関数 $\Delta(\boldsymbol{k})$ は

$$\Delta(\boldsymbol{k}) \;=\; \sum_{\boldsymbol{k}'} V(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')F(\boldsymbol{k}') \tag{5.2}$$

で表される. ここで $V(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$ はペアリング相互作用で, 一般的に

$$V(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') \;=\; \sum_{\gamma} v^{\gamma}\sum_{i} l_i^{\gamma}(\boldsymbol{k})l_i^{\gamma}(\boldsymbol{k}') \tag{5.3}$$

で表される. $\boldsymbol{D}_4$ 対称性を有する系では γ は $\boldsymbol{D}_4$ の既約表現を表し, $l_i^{\gamma}(\boldsymbol{k})$ はその既約表現の基底を表す.

Ginzburg-Landau 理論では (5.2) と (5.3) を考慮し, 特定の既約表現 (例えば γ) の相互作用だけが寄与しているとして, ギャップ関数を

$$\Delta(\boldsymbol{k}) \;= \sum_{i} \eta_i^{\gamma} l_i^{\gamma}(\boldsymbol{k}) \tag{5.4}$$

で近似する. ここで

$$\eta_i^{\gamma} \;=\; v^{\gamma}\sum_{\boldsymbol{k}'} l_i^{\gamma}(\boldsymbol{k}')F(\boldsymbol{k}') \tag{5.5}$$

である. したがってギャップ関数 $\Delta(\boldsymbol{k})$ はベクトル空間

$$\begin{aligned} V_R^{\gamma} &= \{l^{\gamma}, il^{\gamma}\}_R \quad \gamma\text{: 一次元表現の場合} \\ V_R^{\gamma} &= \{l_1^{\gamma}, l_2^{\gamma}, il_1^{\gamma}, il_2^{\gamma}\}_R \quad \gamma\text{: 二次元表現の場合} \end{aligned} \tag{5.6}$$

のベクトルとみなすことができて, $\Delta(\boldsymbol{k})$ は一次元表現のとき,

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{k}) &= xl^{\gamma} + yil^{\gamma} = \eta^{\gamma} l^{\gamma} \\ \eta^{\gamma} &= x + iy\end{aligned} \tag{5.7}$$

二次元表現のとき,

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{k}) &= \sum_{j=1}^{2}(x_j l_j^{\gamma} + y_j i l_j^{\gamma}) = \sum_{j=1}^{2} \eta_j^{\gamma} l_j^{\gamma} \\ \eta_j &= x_j + iy_j\end{aligned} \tag{5.8}$$

と表される. 表 3.2 に見られるように, $\boldsymbol{D}_4$ の既約表現には 4 個の一次元表現 A_1, A_2, B_1, B_2 と一個の 2 次元表現 E がある. 各表現の基底の例を表 5.1 に示す.

表現			基底関数のタイプ
$A_1:$	l^{A_1}	$=$	$c, (k_x^2 + k_y^2), k_z^2$
$A_2:$	l^{A_2}	$=$	$k_x k_y (k_x^2 - k_y^2)$
$B_1:$	l^{B_1}	$=$	$k_x^2 - k_y^2$
$B_2:$	l_{B_2}	$=$	$k_x k_y$
$E:$	l_1^E	$=$	$-k_z k_x$
	l_2^E	$=$	$k_z k_y$

表 5.1: $\boldsymbol{D}_4$ の既約表現の基底.

5.2 高温相での対称性の群

各変分空間 V_R^{γ} には次の群

$$\begin{aligned}G_0 &= \boldsymbol{D}_4 \times \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{M} &= \boldsymbol{\Phi} + t\boldsymbol{\Phi}\end{aligned} \tag{5.9}$$

が作用している. ここで $\boldsymbol{\Phi}$ はオーダーパラメーターの位相を一斉に変えるグローバルゲージ変換 (global gauge transformation) の群である. 位相 $e^{i\phi}$ の変換操作を $\tilde{\phi}$ と記せば,

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}\cdot(l_j^{\gamma}, il_j^{\gamma}) &= (e^{i\phi} l_j^{\gamma}, e^{i\phi} il_j^{\gamma}) \\ &= ((\cos\phi + i\sin\phi) l_j^{\gamma}, (\cos\phi + i\sin\phi) il_j^{\gamma}) \\ &= (l_j^{\gamma}, il_j^{\gamma}) \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5.10}$$

t は時間反転で V_R^{γ} への作用は

$$\begin{aligned}t\cdot(l_j^{\gamma}, il_j^{\gamma}) &= (l_j^{\gamma}, -il_j^{\gamma}) \\ &= (l_j^{\gamma}, il_j^{\gamma}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5.11}$$

である．

$\boldsymbol{D}_4$ の V_R^γ の基底への作用は既約表現 γ の基底 l_j^γ, $p \in \boldsymbol{D}_4$ に対して

$$p \cdot l_j^\gamma = \sum_{j'=1}^{d_\gamma} l_{j'}^\gamma D_{j'j}^\gamma(p) \tag{5.12}$$

で与えられる．ここで $D^\gamma(p)$ は既約表現 γ の表現行列で表 3.2 で与えられる．

以上の関係は $\boldsymbol{D}_4$ は $\{l_j^\gamma\}_R$ ににのみ作用し, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\Phi} + t\boldsymbol{\Phi}$ は次のように $\{1, i\}_R$ にのみに作用すると考えることが出来る．

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} \cdot (1, i) &= (1, i) \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \\ t \cdot (1, i) &= (1, i) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.13}$$

オーダーパラメーター

$$\boldsymbol{\Delta} = \sum_{j=1}^{d_\gamma} \eta_j l_j^\gamma = \sum_{j=1}^{d_\gamma} (x_j + iy_j) l_j^\gamma \tag{5.14}$$

に対する $G_0 = \boldsymbol{D}_4 \times \boldsymbol{M}$ の作用を考える．$p \in \boldsymbol{D}_4$, に対して

$$\begin{aligned} p \cdot \boldsymbol{\Delta} &= \sum_{j=1}^{d_\gamma} \eta_j (p \cdot l_j^\gamma) \\ &= \sum_{j=1}^{d_\gamma} \eta_j (\sum_{j'=1}^{d_\gamma} l_{j'}^\gamma D_{j'j}^\gamma(p)) \\ &= \sum_{j'=1}^{d_\gamma} (\sum_{j=1}^{d_\gamma} D_{j'j}^\gamma(p) \eta_j) l_{j'}^\gamma \end{aligned} \tag{5.15}$$

であるので, $\boldsymbol{D}_4$ は η_j に次のように作用すると考えてよい．

$$p \cdot \eta_j = \sum_{j'}^{d_\gamma} D_{jj'}^\gamma(p) \eta_{j'} \tag{5.16}$$

同様に $\tilde{\phi} \in \boldsymbol{\Phi}$, $t \in \boldsymbol{M}$ は η_j に次の様に作用すると考えてよい．

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} \cdot \eta_j &= e^{i\phi} \eta_j \\ t \cdot \eta_j &= \eta_j^* \end{aligned} \tag{5.17}$$

ここで二次元空間 $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ に作用する点群 $\boldsymbol{D}_\infty$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_\infty &= \boldsymbol{C}_\infty + C_{2x} \boldsymbol{C}_\infty \\ \boldsymbol{C}_\infty &= \{C_z(\phi) \mid 0 \le \phi \le 2\pi\} \end{aligned} \tag{5.18}$$

を考える. ここで $C_z(\phi)$ は z 軸の回りの角 ϕ の空間回転であり, $\boldsymbol{D}_\infty$ の $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ への作用は

$$\begin{aligned} C_z(\phi)\cdot(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y) &= (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \\ C_{2x}\cdot(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y) &= (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.19}$$

となる. (5.13) と (5.19) を比べると $\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{D}_\infty$ は同型であることが分かる. その同型対応は

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &\Longrightarrow C_z(\phi) \\ t &\Longrightarrow C_{2x} \end{aligned} \tag{5.20}$$

である.

Ginzburg-Landau 理論では, 系の自由エネルギーとして η（一次元表現）または (η_1, η_2)（二次元表現）の $\boldsymbol{D}_4 \times \boldsymbol{M}$ 不変な 4 次式までを取ったものである. すなわち

$$\begin{aligned} F(\eta, \alpha) &= \alpha|\eta|^2 + \beta|\eta|^4, \quad \text{一次元表現の場合} \\ F(\eta_1, \eta_2, \alpha) &= \alpha(|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2) + \beta_1(|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2)^2 \\ &\quad + \beta_2|(\eta_1^2 + \eta_2^2)|^2 + \beta_3(|\eta_1|^4 + |\eta_4|^4), \quad \text{二次元表現の場合} \end{aligned} \tag{5.21}$$

である. ここで α は外部パラメーター, $\beta, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ は正の定数である. これらの自由エネルギーが (5.16), (5.17) の変換に対して不変であることは容易に確かめられる. たとえば二次元表現の場合 C_{4z}^+ の変換 $C_{4z}^+\cdot(\eta_1, \eta_2) = (-\eta_2, \eta_1)$ に対して (5.21) の $F(\eta_1, \eta_2, \alpha)$ が不変であることは明らかである.

これらの $F(\eta, \alpha)$ または $F(\eta_1, \eta_2, \alpha)$ の極値を与える η または (η_1, η_2) を求めるのが課題である. 一次元分岐定理を使ってこれらを求めよう.

5.3　G_0 の固定部分群とその固定点部分空間

この節では各既約表現の変分空間 V_R^γ における, $G_0 = \boldsymbol{D}_4 \times \boldsymbol{M}$ の固定部分群と固定点部分空間を求めよう.

1 次元表現の場合

A_1 表現　A_1 表現の場合 $V_R^{A_1} = \{l^{A_1}, il^{A_1}\}_R$ の任意のベクトル v は

$$v = xl^{A_1} + iyl^{A_1} = \eta l^{A_1} = e^{i\phi}|\eta|l^{A_1} = \tilde{\phi}\cdot|\eta|l^{A_1} \tag{5.22}$$

と表される. ここで $x, y \in \mathbf{R}$ で $\eta = x + iy = e^{i\phi}|\eta|$ である. したがって v は $|\eta|l^{A_1}$ に物理的に同値になる. $|\eta|l^{A_1}$ を代表元とすれば表 3.2 および (5.13) より l^{A_1} は $\boldsymbol{D}_4$ と $t \in \boldsymbol{M}$ に不変なので, 固定部分群とその固定点部分空間は

$$\begin{aligned} G^{A_1} &= \boldsymbol{D}_4 \times T \\ \mathrm{Fix}(G^{A_1}) &= \{l^{A_1}\}_R \end{aligned} \tag{5.23}$$

となる. ここで $T = (E, t)$ である.

A_2 表現 A_1 表現の場合と同様に $V_R^{A_2}$ の任意のベクトル v は $|\eta| l^{A_2}$ に物理的に同値になる．表 3.2 より l^{A_2} は $\boldsymbol{C}_4 = (E, C_{4z}^+, C_{2z}, C_{4z}^-)$ の作用で不変で $C_{2x}\boldsymbol{C}_4 = (C_{2x}, C_{2y}, C_{2a}, C_{2b})$ の作用で符号を変えるので l^{A_2} は $\tilde{\pi} C_{2x}\boldsymbol{C}_4$ の作用で不変になる．したがって A_2 表現の場合の固定部分群と固定点部分空間は

$$\begin{aligned} G^{A^2} &= (\boldsymbol{C}_4 + \tilde{\pi} C_{2x}\boldsymbol{C}_4) \times T \\ \mathrm{Fix}(G^{A^2}) &= \{l^{A_2}\}_R \end{aligned} \tag{5.24}$$

で与えられる[1]．

B_1 表現 A_1, A_2 の場合と同様に，$|\eta| l^{B_1}$ を $V_R^{B_1}$ の代表元とすることが出来る．表 3.2 より l^{B_1} は $\boldsymbol{D}_2 = (E, C_{2z}, C_{2x}, C_{2y})$ に不変で $C_{4z}^+\boldsymbol{D}_2 = (C_{4z}^+, C_{4z}^-, C_{2a}, C_{2b})$ に対して符号を変えるから，$\tilde{\pi} C_{4z}^+\boldsymbol{D}_2$ に対して不変である．したがって B_1 表現の場合の固定部分群と固定点部分空間は

$$\begin{aligned} G^{B_1} &= (\boldsymbol{D}_2 + \tilde{\pi} C_{4z}^+\boldsymbol{D}_2) \times T \\ \mathrm{Fix}(G^{B_1}) &= \{l^{B_1}\}_R \end{aligned} \tag{5.25}$$

で与えられる．

B_2 表現 B_2 表現は表 3.2 より $\boldsymbol{D}_{2a} = (E, C_{2z}, C_{2a}, C_{2b})$ に不変で $C_{2x}\boldsymbol{D}_{2a} = (C_{2x}, C_{2y}, C_{4z}^-, C_{4z}^+)$ に対して符号を変えるから，$\tilde{\pi} C_{2x}\boldsymbol{D}_{2a}$ に対して不変である．したがって B_2 表現の場合の固定部分群と固定点部分空間は

$$\begin{aligned} G^{B_2} &= (\boldsymbol{D}_{2a} + \tilde{\pi} C_{2x}^+\boldsymbol{D}_{2a}) \times T \\ \mathrm{Fix}(G^{B_2}) &= \{l^{B_2}\}_R \end{aligned} \tag{5.26}$$

で与えられる．

2 次元 : E 表現の場合

変分空間は $V_R^E = \{l_1^E, l_2^E, il_1^E, il_2^E\}$ である．V_R^E の任意のベクトル v は

$$v = \sum_{j=1}^{2} (x_j l_j^E + i y_j l_j^E) = \sum_{j=1}^{2} \eta_j l_j^E \tag{5.27}$$

と表される．ここで $\eta_j = x_j + iy_j$ で x_j, y_j は実数である．$G_0 = \boldsymbol{D}_4 \times \boldsymbol{M}$ の V_R^E における固定部分群を G_j^E とする．

G_j^E は空間回転と結合していない純粋なゲージ変換 $\tilde{\phi}$ $(\phi \neq 0)$ を含んでいない．何故ならば任意の $v(\neq 0) \in V_R^E$ にたいして

$$\tilde{\phi} \cdot v = e^{i\phi} v \neq v \text{ for } \phi \neq 0 \tag{5.28}$$

となるからである．

また表 3.2 と (5.16) より $p(\neq E) \in \boldsymbol{C}_4$ は任意の $v(\neq 0) \in V_R^E$ にたいして

$$p \cdot v \neq v \tag{5.29}$$

[1] Volovik and Gorkov[12] は G^{A_2} を $D_4(C_4) \times \mathrm{R}$, G^{B_1} を $D_4^{(1)}(D_2) \times \mathrm{R}$, G^{B_2} を $D_4^{(2)}(D_2) \times \mathrm{R}$, G_1^E, G_2^E, G_3^E を $D_4(E)$, $D_2(C_2) \times R$, $D_2(C_2') \times R$ と記している

となる．例えば $v = \eta_1 l_1^E + \eta_2 l_2^E \in V_R^E$ が C_{4z}^+ に不変とすると，

$$\begin{aligned} C_{4z}^+ \cdot v &= ((C_{4z}^+ \cdot \eta_1) l_1^E + (C_{4z}^+ \cdot \eta_2) l_2^E) = (-\eta_2 l_1^E + \eta_1 l_2^E) \\ &= (\eta_1 l_1^E + \eta_2 l_2^E) \end{aligned} \tag{5.30}$$

となって $-\eta_2 = \eta_1$, $\eta_1 = \eta_2$ より $\eta_1 = \eta_2 = 0$ が得られる．したがって G_j^E は $\boldsymbol{M}$ の元が結合しない純粋な $p(\neq E) \in \boldsymbol{C}_4$ を含まない．

$G_0 = \boldsymbol{D}_4 \times \boldsymbol{M}$ の部分群は定理 2.4 により $\boldsymbol{D}_4$ の部分群 H_a とその正規部分群 H_0, および $\boldsymbol{M}$ の部分群 K_a とその正規部分群 K_0 で

$$H_a/H_0 \cong K_a/K_0 \tag{5.31}$$

となるものから，

$$(H_a/H_0; K_a/K_0; \theta) = H_0K_0 + h_1k_1H_0K_0 + \cdots + h_ik_iH_0K_0 + \cdots + h_mk_mH_0K_0 \tag{5.32}$$

として求められる．ここで同型対応 $\theta : h_iH_0 \Longleftrightarrow k_iK_0$ があるものとした．

$\boldsymbol{D}_4$ の部分群とその正規部分群は表 5.2 のようになる．$\boldsymbol{D}_4 \times \boldsymbol{M}$ の部分群 $(H_a/H_0; K_a/K_0; \theta)$ は H_0 を含んでおり，E 以外の $\boldsymbol{C}_4$ の元は固定部分群としては含まれないので，表 5.2 の中で V_R^E の固定部分群として可能性のあるのは H_0 が $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_{2x}, \boldsymbol{C}_{2a}$ の場合だけである．すなわち H_a/H_0 として可能なのは表 5.2 の第 4 列のコメント欄に $*$ 印がついているものだけである．

$\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{D}_\infty$ の同型対応 (5.20) があるので $\boldsymbol{D}_\infty$ の部分群 $\boldsymbol{D}_n, \boldsymbol{C}_n$ 等に同型な $\boldsymbol{M}$ の部分群を $\boldsymbol{D}_n^M, \boldsymbol{C}_n^M$ 等と書くことにする．たとえば

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}_\infty^M &= \{\widetilde{\phi} \mid 0 \le \phi \le 2\pi\} \\ \boldsymbol{D}_\infty^M &= \boldsymbol{C}_\infty^M + t\boldsymbol{C}_\infty^M \\ \boldsymbol{C}_4^M &= \{E, \widetilde{(\tfrac{2\pi}{4})}, \widetilde{\pi}, \widetilde{(-\tfrac{2\pi}{4})}\} \\ \boldsymbol{D}_4^M &= \boldsymbol{C}_4^M + t\boldsymbol{C}_4^M \\ \boldsymbol{D}_2^M &= \{E, \widetilde{\pi}, t, t\widetilde{\pi}\} \\ \boldsymbol{C}_{2x}^M &= \{E, t\} \equiv T \end{aligned} \tag{5.33}$$

このように考えると，求める部分群は $\boldsymbol{D}_4 \times \boldsymbol{D}_\infty^M$ の部分群となる．この部分群は表 5.2 の $*$ 印のある H_a/H_0 を取り $\boldsymbol{D}_\infty^M$ の部分群 K_a とその正規部分群 K_0 で $H_a/H_0 \cong K_a/K_0$ なる K_a, K_0 を取って部分群 $U = (H_a/H_0; K_a/K_0 : \theta)$ として構成できる．U は純粋な位相変化 $\widetilde{\phi}$ $(\neq 0)$ を含まない．また U は K_0 を含んでいるので K_0 は純粋な位相変化 $\widetilde{\phi}$ $(\neq 0)$ を含まない．したがって可能な K_0 は $\boldsymbol{C}_1^M$ と $\boldsymbol{C}_{2x}^M = T = (E, t)$ を考えれば十分である．これ以外に $T_\phi = (E, \tilde{\phi}t)$ が考えられるが

$$T_\phi = (E, \tilde{\phi}t) = \widetilde{(\frac{\phi}{2})}(E, t)\widetilde{(-\frac{\phi}{2})} \tag{5.34}$$

となるので $T = (E, t)$ に共役な群になり物理的に同値になるため，T_ϕ は考える必要が無い．この $K_0 = \boldsymbol{C}_1^M, \boldsymbol{C}_{2x}^M = (E, t)$ の二つの場合に K_a/K_0 が表 5.2 の $*$ 印のついた H_a/H_0 と同型なるものを組み合わせて行けば可能な固定部分群が得られる．以下可能な組み合わせの例を示す．

$\boldsymbol{D}_4$の部分群 H_a	H_aの正規部分群 H_0	商群 H_a/H_0	コメント
$\boldsymbol{D}_4$	$\boldsymbol{D}_4$	$\boldsymbol{C}_1$	
	$\boldsymbol{C}_4$	$\boldsymbol{C}_2$	
	$\boldsymbol{D}_2$	$\boldsymbol{C}_2$	
	$\boldsymbol{D}_{2a}$	$\boldsymbol{C}_2$	
	$\boldsymbol{C}_{2z}$	$\boldsymbol{D}_2$	
	$\boldsymbol{C}_1$	$\boldsymbol{D}_4$	*
$\boldsymbol{C}_4$	$\boldsymbol{C}_4$	$\boldsymbol{C}_1$	
	$\boldsymbol{C}_{2z}$	$\boldsymbol{C}_2$	
	$\boldsymbol{C}_1$	$\boldsymbol{C}_4$	*
$\boldsymbol{D}_2$	$\boldsymbol{D}_2$	$\boldsymbol{C}_1$	
	$\boldsymbol{C}_{2z}$	$\boldsymbol{C}_2$	
	$\boldsymbol{C}_{2x}$	$\boldsymbol{C}_2$	*
	$\boldsymbol{C}_1$	$\boldsymbol{D}_2$	*
$\boldsymbol{D}_{2a}$	$\boldsymbol{D}_{2a}$	$\boldsymbol{C}_1$	
	$\boldsymbol{C}_{2z}$	$\boldsymbol{C}_2$	
	$\boldsymbol{C}_{2a}$	$\boldsymbol{C}_2$	*
	$\boldsymbol{C}_1$	$\boldsymbol{D}_{2a}$	*
$\boldsymbol{C}_{2z}$	$\boldsymbol{C}_{2z}$	$\boldsymbol{C}_1$	
	$\boldsymbol{C}_1$	$\boldsymbol{C}_2$	*
$\boldsymbol{C}_{2x}$	$\boldsymbol{C}_{2x}$	$\boldsymbol{C}_1$	*
	$\boldsymbol{C}_1$	$\boldsymbol{C}_2$	*
$\boldsymbol{C}_{2a}$	$\boldsymbol{C}_{2a}$	$\boldsymbol{C}_1$	*
	$\boldsymbol{C}_1$	$\boldsymbol{C}_2$	*
$\boldsymbol{C}_1$	$\boldsymbol{C}_1$	$\boldsymbol{C}_1$	*

表 5.2: $\boldsymbol{D}_4$ の部分群とその正規部分群. 互いに共役な部分群があるときはその中の1個を記した.

(1) $(\boldsymbol{D}_4/\boldsymbol{C}_1; \boldsymbol{D}_4^M/\boldsymbol{C}_1^M)$

$\boldsymbol{D}_4$, $\boldsymbol{D}_4^M$ を次の様に $\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{C}_1^M = E$ に関して剰余類分解する.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_4 &= E + C_{4z}^+ + C_{2z} + C_{4z}^- \\ &\quad + C_{2x} + C_{2b} + C_{2y} + C_{2a} \\ \boldsymbol{D}_4^M &= E + \widetilde{(\tfrac{2\pi}{4})} + \widetilde{\pi} + \widetilde{(-\tfrac{2\pi}{4})} \\ &\quad + t + t\widetilde{(\tfrac{2\pi}{4})} + t\widetilde{\pi} + t\widetilde{(-\tfrac{2\pi}{4})} \end{aligned} \tag{5.35}$$

次のような同型写像 $\theta_1 : \boldsymbol{D}_4 \Longrightarrow \boldsymbol{D}_4^M$

$$\begin{aligned} \theta_1(C_{4z}^+) &= \widetilde{(\tfrac{2\pi}{4})} \\ \theta_1(C_{2x}) &= t \end{aligned} \tag{5.36}$$

を使って対応する剰余類を掛け合わせると, 次の部分群を得る.

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{D}_4/\boldsymbol{C}_1;\boldsymbol{D}_1^M/\boldsymbol{C}_1^M;\theta_1) &= E+C_{4z}^{+}(\widetilde{\tfrac{2\pi}{4}})+C_{2z}\widetilde{\pi}+C_{4z}^{-}(\widetilde{-\tfrac{2\pi}{4}}) \\
&\quad +C_{2x}t+C_{2b}t(\widetilde{\tfrac{2\pi}{4}})+C_{2y}t\widetilde{\pi}+C_{2a}t(\widetilde{-\tfrac{2\pi}{4}}) \\
&= \widetilde{\boldsymbol{C}}_4+C_{2x}t\widetilde{\boldsymbol{C}}_4 \\
&= \widetilde{\boldsymbol{D}}_4
\end{aligned}
\tag{5.37}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{C}}_4 &= E+C_{4z}^{+}(\widetilde{\tfrac{2\pi}{4}})+C_{2z}\widetilde{\pi}+C_{4z}^{-}(\widetilde{-\tfrac{2\pi}{4}}) \\
\widetilde{\boldsymbol{D}}_4 &= \widetilde{\boldsymbol{C}}_4+C_{2x}t\widetilde{\boldsymbol{C}}_4
\end{aligned}
\tag{5.38}
$$

である.

固定部分群 $\widetilde{\boldsymbol{D}_4}$ の固定点部分空間 $\mathrm{Fix}(\widetilde{\boldsymbol{D}_4})$ は V_R^E の基底に $\widetilde{\boldsymbol{D}}_4$ の恒等表現の射影演算子 $P^{(0)}(\widetilde{\boldsymbol{D}}_4)$ をを作用させることによって得られる. l_1^E に $P^0(\widetilde{\boldsymbol{D}_4})$ を作用させると

$$
\begin{aligned}
P^{(0)}(\widetilde{\boldsymbol{D}}_4)\cdot l_1^E &= \tfrac{2}{8}\{l_1^E+C_{4z}^{+}(\widetilde{\tfrac{2\pi}{4}})\cdot l_1^E+C_{2z}\widetilde{\pi}\cdot l_1^E+C_{4z}^{-}(\widetilde{-\tfrac{2\pi}{4}})\cdot l_1^E \\
&\quad +C_{2x}t\cdot l_1^E+C_{2b}t(\widetilde{\tfrac{2\pi}{4}})\cdot l_1^E+tC_{2y}\widetilde{\pi}\cdot l_1^E+C_{2a}t(\widetilde{-\tfrac{2\pi}{4}})\cdot l_1^E\} \\
&= \tfrac{1}{4}\{l_1^E+il_2^E(i)+(-l_1^E)(-1)+(-l_2^E)(-i) \\
&\quad +l_1^E+(-l_2^E)(-i)+(-l_1^E)(-1)+(l_1^E)(i)\} \\
&= (l_1^E+il_2^E)
\end{aligned}
\tag{5.39}
$$

同様に $P^{(0)}(\widetilde{\boldsymbol{D}}_4)$ を l_2^E, il_1^E, il_2^E に作用させると $0,0,(l_1^E+il_2^E)$ を得る. これより固定部分群とその固定点部分空間

$$
\begin{aligned}
G_1^E &= \widetilde{\boldsymbol{D}_4} \\
\mathrm{Fix}(G_1^E) &= \{(l_1^E+il_2^E)\}_R
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

を得る.

同型写像 $\theta_2:\boldsymbol{D}_4\Longrightarrow\boldsymbol{D}_4^M$

$$
\begin{aligned}
\theta_2(C_{4z}^{+}) &= (\widetilde{-\tfrac{2\pi}{4}}) \\
\theta_2(C_{2x}) &= t
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

を使って対応する剰余類を掛け合わせると

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{D}_4/\boldsymbol{C}_1;\boldsymbol{D}_1^M/\boldsymbol{C}_1^M;\theta_2) &= E+C_{4z}^{+}(\widetilde{-\tfrac{2\pi}{4}})+C_{2z}\widetilde{\pi}+C_{4z}^{-}(\widetilde{\tfrac{2\pi}{4}}) \\
&\quad +C_{2x}t+C_{2b}t(\widetilde{-\tfrac{2\pi}{4}})+C_{2y}t\widetilde{\pi}+C_{2a}t(\widetilde{\tfrac{2\pi}{4}}) \\
&= \widetilde{\boldsymbol{C}}_4'+C_{2x}t\widetilde{\boldsymbol{C}}_4' \\
&= \widetilde{\boldsymbol{D}}_4'
\end{aligned}
\tag{5.42}
$$

を得る. ここで

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{C}}_4' &= E+C_{4z}^{+}(\widetilde{-\tfrac{2\pi}{4}})+C_{2z}\widetilde{\pi}+C_{4z}^{-}(\widetilde{\tfrac{2\pi}{4}}) \\
\widetilde{\boldsymbol{D}}_4' &= \widetilde{\boldsymbol{C}}_4'+C_{2x}t\widetilde{\boldsymbol{C}}_4'
\end{aligned}
\tag{5.43}
$$

既約表現	基底関数のタイプ	固定部分群	固定点部分空間
A_1	$l^{A_1} = c, (k_x^2 + k_y^2), k_z^2$	$G^{A_1} = \boldsymbol{D}_4 \times T$	$\{l^{A_1}\}_R$
A_2	$l^{A_2} = k_x k_y (k_x^2 - k_y^2)$	$G^{A_2} = (\boldsymbol{C}_4 + C_{2x}\widetilde{\pi}\boldsymbol{C}_4) \times T$	$\{l^{A_2}\}_R$
B_1	$l^{B_1} = (k_x^2 - k_y^2)$	$G^{B_1} = (\boldsymbol{D}_2 + C_{4z}^{+}\widetilde{\pi}\boldsymbol{D}_2) \times T$	$\{l^{B_1}\}_R$
B_2	$l^{B_2} = k_x k_y$	$G^{B_2} = (\boldsymbol{D}_{2a} + C_{2x}\widetilde{\pi}\boldsymbol{D}_{2a}) \times T$	$\{l^{B_2}\}_R$
E	$\left.\begin{array}{lcl} l_1^E &=& -k_z k_y \\ l_2^E &=& k_z k_x \end{array}\right\}$	$G_1^E = \widetilde{\boldsymbol{D}_4} = \widetilde{\boldsymbol{C}_4} + C_{2x}t\widetilde{\boldsymbol{C}_4}$	$\{(l_1^E + il_2^E)\}_R$
		$G_2^E = (E + C_{2x} + C_{2z}\widetilde{\pi} + C_{2y}\widetilde{\pi}) \times T$	$\{l_1^E\}_R$
		$G_3^E = (E + C_{2a} + C_{2z}\widetilde{\pi} + C_{2b}\widetilde{\pi}) \times T$	$\{(l_1^E + l_2^E)\}_R$

表 5.3: $\boldsymbol{D}_4$ 対称性を持つスピンシングレット超伝導状態のクラス.

である. 固定部分群 $\widetilde{\boldsymbol{D}}_4'$ の固定点部分空間 $\mathrm{Fix}(\widetilde{\boldsymbol{D}}_4')$ は $\widetilde{\boldsymbol{D}}_4$ の場合と同様にして

$$\begin{aligned}\mathrm{Fix}(\widetilde{\boldsymbol{D}}_4') &= \{(l_1^E - il_2^E)\}_R = C_{2x} \cdot \{(l_1^E + il_2^E)\}_R \\ &= C_{2x} \cdot \mathrm{Fix}(\widetilde{\boldsymbol{D}}_4) \end{aligned} \tag{5.44}$$

が得られ, $\widetilde{\boldsymbol{D}}_4$ の場合と同値になる.

(2) $(\boldsymbol{D}_2/\boldsymbol{C}_{2x}; \boldsymbol{D}_2^M/\boldsymbol{C}_{2x}^M)$

$\boldsymbol{D}_2$, $\boldsymbol{D}_2^M$ を $\boldsymbol{C}_{2x}$, $\boldsymbol{C}_{2x}^M = T = (E, t)$ に関して剰余類分解すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_2 &= \boldsymbol{C}_{2x} + C_{2z}\boldsymbol{C}_{2x} \\ \boldsymbol{D}_2^M &= \boldsymbol{C}_{2x}^M + \widetilde{\pi}\boldsymbol{C}_{2x}^M = T + \widetilde{\pi}T \end{aligned} \tag{5.45}$$

を得る. 対応する剰余類を掛け合わせて部分群を構成すると

$$\begin{aligned}G_2^E &= (\boldsymbol{D}_2/\boldsymbol{C}_{2x}; \boldsymbol{D}_2^M/\boldsymbol{C}_{2x}^M) = \boldsymbol{C}_{2x}T + C_{2z}\widetilde{\pi}\boldsymbol{C}_{2x}T \\ &= (E + C_{2x} + C_{2z}\widetilde{\pi} + C_{2y}\widetilde{\pi}) \times T \end{aligned} \tag{5.46}$$

を得る. $l_1^E, il_1^E, l_2^E, il_2^E$ に射影演算子 $P^{(0)}(G_2^E)$ を作用させると $\{l_1^E\}_R$ が G_E^2 の固定点部分空間であることが分かる. すなわち

$$\begin{aligned}G_2^E &= (E + C_{2x} + C_{2z}\widetilde{\pi} + C_{2y}\widetilde{\pi}) \times T \\ \mathrm{Fix}(G_2^E) &= \{l_1^E\}_R \end{aligned} \tag{5.47}$$

を得る.

$(\boldsymbol{D}_2/\boldsymbol{C}_{2x}; \boldsymbol{D}_2^M/\boldsymbol{C}_{2x}^M)$ の代りに $(\boldsymbol{D}_2/\boldsymbol{C}_{2x}; \boldsymbol{D}_2^M/\boldsymbol{C}_{2y}^M)$ を考えると, 剰余類分解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_2 &= \boldsymbol{C}_{2x} + C_{2z}\boldsymbol{C}_{2x} \\ \boldsymbol{D}_2^M &= \boldsymbol{C}_{2y}^M + C_{2z}^M\boldsymbol{C}_{2y}^M = (E, t\widetilde{\pi}) + \widetilde{\pi}(E, t\widetilde{\pi}) \end{aligned} \tag{5.48}$$

より

$$\begin{aligned}G_{2'}^E &= (\boldsymbol{D}_2/\boldsymbol{C}_{2x}; \boldsymbol{D}_2^M/\boldsymbol{C}_{2y}) = \boldsymbol{C}_{2x}(E, t\widetilde{\pi}) + C_{2z}\widetilde{\pi}\boldsymbol{C}_{2x}(E, t\widetilde{\pi}) \\ &= (E + C_{2x} + C_{2z}\widetilde{\pi} + C_{2y}\widetilde{\pi})(E + t\widetilde{\pi}) \\ \mathrm{Fix}(G_{2'}^E) &= \{il_1^E\} \end{aligned} \tag{5.49}$$

を得る.

$$
\begin{array}{rcl}
G_{2'}^E &=& (\widetilde{\frac{2\pi}{4}})G_2^E(\widetilde{-\frac{2\pi}{4}}) \\
il_1^E &=& (\widetilde{\frac{2\pi}{4}})\cdot l_1^E
\end{array}
\tag{5.50}
$$

が成り立つので $G_{2'}^E$ と G_2^E は同値となる.

(3) $(\boldsymbol{D}_{2a}/\boldsymbol{C}_{2a};\boldsymbol{D}_2^M/\boldsymbol{C}_{2x}^M)$

$\boldsymbol{D}_{2a}$, $\boldsymbol{D}_2^M$ を $\boldsymbol{C}_{2a}$, $\boldsymbol{C}_{2x}=(E,t)=T$ に関して剰余類分解すると

$$
\begin{array}{rcl}
\boldsymbol{D}_{2a} &=& \boldsymbol{C}_{2a}+C_{2z}\boldsymbol{C}_{2a} \\
\boldsymbol{D}_2^M &=& T+\widetilde{\pi}T
\end{array}
\tag{5.51}
$$

対応する剰余類を掛け合わせて部分群を構成すると

$$
\begin{array}{rcl}
G_3^E &=& (\boldsymbol{D}_{2a}/\boldsymbol{C}_{2a};\boldsymbol{D}_2^M/\boldsymbol{C}_{2x}^M)=\boldsymbol{C}_{2a}T+C_{2z}\widetilde{\pi}\boldsymbol{C}_{2a}T \\
&=& (E+C_{2a}+C_{2z}\widetilde{\pi}+C_{2b}\widetilde{\pi})\times T
\end{array}
\tag{5.52}
$$

を得る. 射影演算子 $P^{(0)}(G_3^E)$ を V_R^E に作用させて, $\{l_1^E+l_2^E\}_R$ が G_3^E の固定点部分空間であることが分かる. すなわち

$$
\begin{array}{rcl}
G_3^E &=& (E+C_{2a}+C_{2z}\widetilde{\pi}+C_{2b}\widetilde{\pi})\times T \\
\mathrm{Fix}(G_3^E) &=& \{(l_1^E+l_2^E)\}_R
\end{array}
\tag{5.53}
$$

を得る.

(3) $(\boldsymbol{D}_2/\boldsymbol{C}_1;\boldsymbol{D}_2^M/\boldsymbol{C}_1^M)$

$\boldsymbol{D}_2$, $\boldsymbol{D}_2^M$ を $\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{C}_1^M=E$ に関して剰余類分解すると

$$
\begin{array}{rcl}
\boldsymbol{D}_2 &=& E+C_{2z}+C_{2x}+C_{2y} \\
\boldsymbol{D}_2^M &=& E+\widetilde{\pi}+t+t\widetilde{\pi}
\end{array}
\tag{5.54}
$$

を得る.

同型対応 $\theta_1:\boldsymbol{D}_2\Longrightarrow\boldsymbol{D}_2^M$

$$
\begin{array}{rcl}
\theta_1(C_{2z}) &=& \widetilde{\pi} \\
\theta_1(C_{2x}) &=& t \\
\theta_1(C_{2y}) &=& t\widetilde{\pi}
\end{array}
\tag{5.55}
$$

より

$$
\begin{array}{rcl}
G_4^E &=& (\boldsymbol{D}_2/\boldsymbol{C}_1;\boldsymbol{D}_2^M/\boldsymbol{C}_1^M;\theta_1)=(E+C_{2z}\widetilde{\pi}+C_{2x}t+C_{2y}t\widetilde{\pi}) \\
\mathrm{Fix}(G_4^E) &=& \{l_1^E,il_2^E\}
\end{array}
\tag{5.56}
$$

を得て, 固定点部分空間は 2 次元になる.

同型対応 $\theta_2:\boldsymbol{D}_2\Longrightarrow\boldsymbol{D}_2^M$

$$
\begin{array}{rcl}
\theta_1(C_{2z}) &=& t \\
\theta_1(C_{2x}) &=& \widetilde{\pi} \\
\theta_1(C_{2y}) &=& t\widetilde{\pi}
\end{array}
\tag{5.57}
$$

の場合は

$$\begin{aligned} G_5^E &= (\boldsymbol{D}_2/\boldsymbol{C}_1; \boldsymbol{D}_2^M/\boldsymbol{C}_1^M; \theta_2) = (E + C_{2z}t + C_{2x}\widetilde{\pi} + C_{2y}t\widetilde{\pi}) \\ \mathrm{Fix}(G_4^E) &= \{il_2^E\}_R \end{aligned} \tag{5.58}$$

を得る. ところが

$$\begin{aligned} il_2^E &= \widetilde{(\tfrac{2\pi}{4})}C_{4z}^+ \cdot l_1^E \\ G_5^E &= \subset ((\widetilde{\tfrac{2\pi}{4}})C_{4z}^+)G_E^2((\widetilde{\tfrac{2\pi}{4}})C_{4z}^+)^{-1} \end{aligned} \tag{5.59}$$

であるので, (5.47) の G_2^E の場合を考えておけば十分である.
表 5.2 の $*$ 印のある他の場合を考察すると固定点部分空間が 2 次元以上のものか, G_1^E, G_2^E, G_3^E のどれかに同値なものであることが分かる. このようにして, 固定点部分空間が一次元である固定部分群は表 5.3 のようになる.

自由エネルギー (5.21) の極値は表 5.3 の一次元の固定部分空間の方向にあるので, 変分問題は容易に解ける.

(1) 一次元表現の場合

A_1, A_2, B_1, B_2 表現とも $\eta = x$ (x は実数) と置いて

$$\begin{aligned} F(x) &= \alpha x^2 + \beta x^4 \\ \Phi(x) &= \frac{dF(x)}{dx} = 2\alpha x + 4\beta x^3 = 0 \end{aligned} \tag{5.60}$$

より極値を与える x_a と極値 $F(x_a)$ は

$$\begin{aligned} x_a &= \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}} \\ F(x_a) &= -\frac{\alpha^2}{4\beta} \end{aligned} \tag{5.61}$$

で与えられる.

(2) 2 次元表現の場合

(a) G_1^E の場合. 固定点部分空間が $\{(l_1^E + il_2^E)\}_R$ なので $(\eta_1, \eta_2) = (x, ix)$ と置いて (5.21) に代入すると極値を与える方程式

$$\begin{aligned} F_1(x,\alpha) &= F(x, ix, \alpha) = 2\alpha x^2 + 4\beta_1 x^4 + 2\beta_3 x^4 \\ \Phi_1(x,\alpha) &= \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} = 4\alpha x + 16\beta_1 x^3 + 8\beta_3 x^3 = 0 \end{aligned} \tag{5.62}$$

を得る. これより極値を与える x_1 と極値 $F(x_1, \alpha)$ は

$$\begin{aligned} x_1 &= \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2(2\beta_1 + \beta_3)}} \\ F_1(x_1,\alpha) &= -\frac{\alpha^2}{2(2\beta_1 + \beta_3)} \end{aligned} \tag{5.63}$$

で与えられる.

(b) G_2^E の場合. 固定点部分空間が $\{(l_1^E)\}_R$ なので $(\eta_1, \eta_2) = (x, 0)$ と置いて (5.21) に代入すると極値を与える方程式

$$\begin{aligned} F_2(x,\alpha) &= F(x,0,\alpha) = \alpha x^2 + \beta_1 x^4 + \beta_2 x^4 + \beta_3 x^4 \\ \Phi_2(x,\alpha) &= \frac{\partial F_2(x,\alpha)}{\partial x} = 2\alpha x + 4\beta_1 x^3 + 4\beta_2 x^3 + 4\beta_3 x^3 = 0 \end{aligned} \tag{5.64}$$

を得る. これより極値を与える x_2 と極値 $F_2(x_2, \alpha)$ は

$$\begin{aligned} x_2 &= \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}} \\ F_2(x_2,\alpha) &= -\frac{\alpha^2}{2(\beta_1++\beta_2+\beta_3)} \end{aligned} \tag{5.65}$$

で与えられる.

(c) G_3^E の場合. 固定点部分空間が $\{(l_1^E + l_2^E)\}_R$ なので $(\eta_1, \eta_2) = (x, x)$ と置いて (5.21) に代入すると極値を与える方程式

$$\begin{aligned} F_3(x_3,\alpha) &= F(x,ix,\alpha) = 2\alpha x^2 + 4\beta_1 x^4 + 4\beta_2 x^4 + 4\beta_3 x^4 \\ \Phi_3(x,\alpha) &= \frac{\partial F_3(x,\alpha)}{\partial x} = 4\alpha x + 16\beta_1 x^3 + 16\beta_2 x^3 + 16\beta_3 x^3 = 0 \end{aligned} \tag{5.66}$$

を得る. これより極値を与える x_3 と極値 $F_3(x_3, \alpha)$ は

$$\begin{aligned} x_3 &= \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{4(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}} \\ F_3(x_3,\alpha) &= -\frac{\alpha^2}{4(\beta_1+\beta_2+\beta_3)} \end{aligned} \tag{5.67}$$

で与えられる.

以上の解析は $\boldsymbol{D}_4$ に不変な 4 次式について行った. 固定部分群と固定点部分空間の関係は群 $\boldsymbol{D}_4$ の構造のみに依存するものであり, 任意の $\boldsymbol{D}_4$ 不変な関数に同様の解析を行うことが出来る.

参考文献

[1] D.H. Sattinger, Group Theoretical Methods in Bifurcation Theory. Lecture Notes in Mathematics **762**. (Springer-Verlag, Berlin, 1979).

[2] A. Vanderbauwhede, Local Bifurcation and Symmetry. Res. Notes Math.**75**. (PitMan, Boston, 1982).

[3] G. Cicogna, Symmetry breakdown from bifurcations. Lettere al Nuovo Cimento **31**(1981), 600.

[4] M. Golubitsky and D. G. Schaeffer , Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Volume I. (Springer-Verlag, 1984).

[5] M. Golubitsky, I. Stewart and D. G. Schaeffer , Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Volume II. (Springer-Verlag, 1985).

[6] 高木貞治：解析概論 (岩波書店, 1938)

[7] 松島与三：多様体入門 (裳華房, 1965)

[8] 鈴木通夫: 群論　上 (岩波書店, 1977)

[9] 彌永昌吉, 小平邦彦: 現代数学概説　I (岩波書店, 1961)

[10] 犬井鉄郎, 田辺行人, 小野寺嘉孝：応用群論〔裳華房,1976)

[11] 吉川圭二: 群と表現（岩波書店, 1996)

[12] G. E. Volovik and L. P. Gorkov, Sov. Phys. JETP **61**(1985),843